Zur Theorie und Anwendung des Größenkalküls der Physik

Quade, Wilhelm

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 18, 1966, S.15-49

Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Zur Theorie und Anwendung des Größenkalküls der Physik

Von **Wilhelm Quade**

(Eingegangen am 29. 11. 1965)

Übersicht: In der vorliegenden Arbeit werden die in [1] begonnenen Untersuchungen der algebraischen Struktur des Größenkalküls fortgesetzt und ergänzt. Von der algebraischen Struktur des Kalküls wird eine kurze auf die Anwendungen zugeschnittene Beschreibung gegeben. Der Kalkül wird auf Geometrie, Mechanik und Elektrodynamik angewandt. Der für die Anwendungen fundamentale Homomorphismus wird beschrieben, damit zusammenhängende Fragen der Erweiterung eines gegebenen Einheitensystems werden untersucht.

Summary: In the present paper investigations of the algebraic structure of calculus of physical quantities referred in [1] are continued and completed. A short description of the calculus with respect to applications is given. The calculus is applied to geometry, mechanics and electrodynamics. The homomorphism fundamental in applications is described, connected questions concerning extension of a given system of units are investigated.

Einleitung

In einer vorangehenden Arbeit „Über die algebraische Struktur des Größenkalküls der Physik" [1] wurden die mathematischen Grundlagen des Größenkalküls untersucht. Dabei handelte es sich hauptsächlich darum, die algebraische Struktur dieses Kalküls zu beschreiben, also die für den Kalkül gültigen „Rechengesetze" zu formulieren. Es zeigt sich, daß diese Rechengesetze in mancher Hinsicht von denen abweichen, die für das Rechnen mit reellen (oder komplexen) Zahlen gelten.

Die nachfolgenden Untersuchungen stützen sich auf die Ergebnisse der soeben genannten Arbeit. Die Grundlagen des Kalküls werden nochmals erörtert, aber in einer gekürzten und abgewandelten Form dargestellt, die stärker auf die Anwendungen zugeschnitten ist. Dabei wird ausgegangen von den folgenden für den Größenkalkül fundamentalen Begriffen: Modul über dem Ring der ganzen Zahlen, unendlicher freier Modul von endlichem Typus, freie kommutative Gruppe von endlichem Typus (auch unendliche freie Abelsche Gruppe von endlichem Rang genannt). Es werden zuerst die freien kommutativen Gruppen vom Typus 1 untersucht. Um einen möglichst einfachen Aufbau der algebraischen Struktur des Größenkalküls zu erreichen, wird das Trennungsaxiom eingeführt. Die Anwendung der freien kommutativen Gruppen vom Typus 1 auf die Geometrie wird ausführlich beschrieben, wobei auch einiges über den Winkel, die Winkelfunktionen und deren Umkehrfunktionen gesagt wird. Es folgen die freien kommutativen Gruppen vom Typus 2 und deren Anwendung auf die Kinematik mit Ausführungen über den Begriff der Winkelgeschwindigkeit. Hierauf wird das Problem der Erweiterung eines Einheitensystems untersucht; diese Betrachtungen bilden eines der Kernstücke der Arbeit. Anschließend werden die freien kommutativen Gruppen vom Typus 4 erörtert, insbesondere das MKSA-System sowie dessen Anwendung auf das Gesamtgebiet „Mechanik-Elektrodynamik", wobei u. a. die „logarithmischen Maße" besprochen werden.

Anknüpfend an eine in der Arbeit [1], § 7 S. 44 gemachte Bemerkung wird gezeigt, wie eine zu der allgemeinen Gruppe $\mathfrak{G}$ der V-Elemente isomorphe Gruppe durch Bildung des direkten Produktes mehrerer Gruppen gewonnen werden kann. Im letzten Paragraphen werden lineare Abbildungen von Vektorräumen und Isomorphismen erörtert und hieraus Folgerungen für die Anwendung gezogen.

Um einige Überlegungen abstrakter Art leichter verständlich zu machen, wurde an entsprechenden Stellen der Text durch Abbildungen unterstützt. Die Anwendung des Kalküls wird an verschiedenen Beispielen aus Geometrie, Kinematik, Dynamik und Elektrodynamik demonstriert.

Die Darstellung weicht in mancher Hinsicht von der in der einschlägigen Literatur gebräuchlichen ab (vgl. hierzu die Darstellungen [2], [3], [4], [5]). Diese Abweichungen sind einerseits durch die benutzte Terminologie bedingt, die sich mehr an die in der Algebra gebräuchliche anlehnt, andererseits durch die verwendeten Formelzeichen, die mit Rücksicht auf die algebraische Struktur des Größenkalküls ausgewählt wurden. Um die Arbeit leichter lesbar zu machen, ist an den Schluß eine Zusammenstellung der benutzten Symbole angehängt.

In der einschlägigen Literatur begegnet man Einheiten wie rad (Radiant), sr (Steradiant), Np (Neper), B (Bel) u. a. Diese Einheiten sind keine Einheiten eines der gebräuchlichen Einheitensysteme, etwa des MKSA-Systems, denn sie können nicht in umkehrbar eindeutiger Weise Potenzprodukten von Einheiten eines der gebräuchlichen Systeme zugeordnet werden.

Anders liegen die Dinge, wenn Einheitensysteme benutzt werden, in denen Einheiten wie rad, sr, u. a. Basiseinheiten sind, was auf eine Erweiterung eines gegebenen Einheitensystems hinausläuft (vgl. § 6). An solch eine Erweiterung wird wohl oft unbewußt die Erwartung geknüpft, daß man auf diesem Wege von einem Homomorphismus zu einem Isomorphismus gelangen könne. Da man sich dabei meist nur mit der Feststellung begnügt, daß derartige Einheiten zu Basiseinheiten gemacht werden können, ohne das so entstehende Einheitensystem genauer zu untersuchen, wird übersehen, daß ein Isomorphismus nicht erreicht, sondern nur der a priori vorhandene Homomorphismus modifiziert wird. Demnach sollte man sich nur in Ausnahmefällen dazu entschließen, eine Erweiterung eines gegebenen Einheitensystems als gerechtfertigt anzusehen, d. h. nur dann, wenn der durch Erweiterung eines gegebenen Einheitensystems entstehende formale Mehraufwand ein für die Beschreibung der physikalischen Zusammenhänge hinreichend wertvolles Mehr an Information bringt. Oft kann schon dadurch, daß der Homomorphismus $f(\mathfrak{S}^2) = \mathfrak{G}_0$ deutlich herausgestellt wird, soviel an Klarheit gewonnen werden, daß von einer Erweiterung abgesehen werden kann.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, meinen Mitarbeitern *H. W. Alten* und *H. Barckow* für wertvolle Anregungen und die stete Hilfsbereitschaft zu

danken, mit der sie mich bei der Herstellung des Manuskriptes unterstützt haben.

§ 1. Moduln über einem Ring, freie Moduln von endlichem Typus

Das Ziel der folgenden einleitenden Betrachtungen ist, den Leser mit einigen Begriffen bekanntzumachen, die bei der Untersuchung der algebraischen Struktur des Größenkalküls unentbehrlich sind. Es handelt sich hierbei einerseits um den Begriff des *Moduls über einem Ring*, andererseits um den Begriff des *unendlichen freien Moduls von endlichem Typus*. Im folgenden wird nur das im Rahmen des Größenkalküls Erforderliche über diese Begriffe mitgeteilt. Dem Leser, der sich eingehender mit diesem Kapitel der Algebra befassen möchte, sei die Lektüre der unter [6] genannten Darstellung empfohlen.

Ausgegangen wird von der *Menge der ganzen Zahlen*

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

Diese Menge werde im folgenden mit Z bezeichnet, ihre Elemente mit $\alpha, \alpha', \ldots$. *Die Elemente von Z bilden einen kommutativen Ring mit der Zahl 1 als Einselement.* Dies besagt, daß die Elemente von Z die folgenden Axiome erfüllen:

1. Sie bilden additiv verknüpft eine kommutative Gruppe.
2. Sie bilden multiplikativ verknüpft eine kommutative Halbgruppe mit der Zahl 1 als neutralem Element.
3. Es gilt das distributive Gesetz

$$\alpha\,(\alpha' + \alpha'') = \alpha\,\alpha' + \alpha\,\alpha'', \qquad \alpha, \alpha', \alpha'' \in Z.$$

Im folgenden werden *Moduln über dem Ring Z der ganzen Zahlen* betrachtet. Es handelt sich dabei, wie der folgenden Definition zu entnehmen ist, um einen Sonderfall der unter dem Namen „Vektorraum“ bekannten algebraischen Struktur. Wird unter Γ eine Menge verstanden, deren Elemente mit $\omega, \omega', \ldots$ bezeichnet werden mögen, dann wird die algebraische Struktur „Modul über dem Ring Z der ganzen Zahlen“, kurz *Z-Modul* genannt, wie folgt definiert:

Definition. Eine Menge Γ wird ein Z-Modul genannt, wenn ihre Elemente den folgenden Axiomen genügen:

1. *Sie bilden additiv verknüpft eine kommutative Gruppe (interne Komposition).*
2. *Zwischen den Elementen von Z und den Elementen von Γ ist eine multiplikative Verknüpfung erklärt, welche jedem Paar (α, ω) mit $\alpha \in Z$* und *$\omega \in \Gamma$ genau ein Element $\omega' \in \Gamma$ zuordnet (externe Komposition),*

$$\omega' = \alpha\,\omega.$$

Diese Verknüpfung habe die folgenden Eigenschaften:

2.1 $\alpha\,(\alpha'\,\omega) = (\alpha\,\alpha')\,\omega$ (assoziatives Gesetz)

2.2 $(\alpha + \alpha')\,\omega = \alpha\,\omega + \alpha'\,\omega$ (distributives Gesetz bezüglich der Addition von Elementen aus Z)

2.3 $\alpha\,(\omega + \omega') = \alpha\,\omega + \alpha\,\omega'$ (distributives Gesetz bezüglich der Addition von Elementen aus Γ)

2.4 $1 \cdot \omega = \omega$ (unitärer Modul)

Von diesen Z-Moduln interessieren hier besonders die *unendlichen freien Moduln von endlichem Typus.*

Im folgenden werde — wie üblich — unter Z^ϱ das ϱ-fache kartesische Produkt der Menge Z verstanden, also die Menge aller ϱ-tupel $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\varrho)$, die sich aus Elementen von Z bilden lassen.

Es seien $\omega_1, \ldots, \omega_\varrho$ endlich viele Elemente eines Z-Moduls Γ. Kann jedes Element ω von Γ in der Form

$$\omega = \alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2 + \ldots + \alpha_\varrho \omega_\varrho, \qquad (\alpha_1, \ldots, \alpha_\varrho) \in Z^\varrho \tag{1.1}$$

dargestellt werden, dann werden die Elemente $\omega_1, \ldots, \omega_\varrho$ *Erzeugende* des Moduls genannt. In diesem Falle sagt man, daß Γ ein Z-Modul von *endlichem* Typus sei (Z-Modul mit *endlich* vielen Erzeugenden).

Sind die Erzeugenden $\omega_1, \ldots, \omega_\varrho$ *linear unabhängig*, dann werden die Erzeugenden $\omega_1, \ldots, \omega_\varrho$ eine *Basis* des Z-Moduls Γ genannt.

Nach diesen Vorbereitungen werde der soeben erwähnte Begriff des unendlichen freien Moduls von endlichem Typus wie folgt definiert:

Definition. Gibt es in Γ (Z-Modul) ϱ linear unabhängige Elemente $\omega_1, \ldots, \omega_\varrho$ und zu jedem Element $\omega \in \Gamma$ genau ein $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\varrho) \in Z^\varrho$, so daß

$$\omega = \alpha_1 \omega_1 + \ldots + \alpha_\varrho \omega_\varrho,$$

dann wird Γ ein unendlicher freier Modul von endlichem Typus (vom Typus ϱ) über dem Ring Z genannt.

Zu dieser Definition seien noch einige Erläuterungen gegeben. Es seien $\omega_1, \ldots, \omega_\varrho$ Elemente eines Z-Moduls Γ. Γ erzeugen heißt: Zu jedem $\omega \in \Gamma$ gibt es *mindestens* ein $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\varrho) \in Z^\varrho$, so daß (1.1) erfüllt ist. Sind außerdem die Elemente $\omega_1, \ldots, \omega_\varrho$ linear unabhängig, dann gibt es zu jedem $\omega \in \Gamma$ *höchstens* ein $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\varrho) \in Z^\varrho$, so daß (1.1) erfüllt ist. Daraus ergibt sich, daß die Abbildung

$$\alpha_1 \omega_1 + \ldots + \alpha_\varrho \omega_\varrho \to (\alpha_1, \ldots, \alpha_\varrho)$$

bijektiv ist, d. h. daß es zu jedem $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\varrho) \in Z^\varrho$ genau ein Element

$$\omega = \alpha_1 \omega_1 + \ldots + \alpha_\varrho \omega_\varrho$$

gibt und umgekehrt. Anders ausgedrückt:

$$\alpha_1 \omega_1 + \ldots + \alpha_\varrho \omega_\varrho = \alpha_1' \omega_1 + \ldots + \alpha_\varrho' \omega_\varrho$$

gilt dann und nur dann, wenn

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_\varrho) = (\alpha_1', \ldots, \alpha_\varrho').$$

Der Z-Modul Γ ist also *frei vom Typus ϱ*, wenn er mindestens eine aus *ϱ linear unabhängigen Erzeugenden $\omega_1, \ldots, \omega_\varrho$* bestehende Basis hat.

Jeder *freie* Z-Modul von endlichem Typus ist eine kommutative Gruppe mit unendlich vielen Elementen, denn die Menge Z, also auch die Menge Z^ϱ enthält unendlich viele Elemente.

Ein Z-Modul mit *endlich* vielen Elementen hat *keine Basis*. Hätte er nämlich eine Basis, dann hätte er unendlich viele Elemente. Ein solcher Modul ist also von endlichem Typus, aber kein *freier* Modul von endlichem Typus.

§ 2. Freie kommutative Gruppe vom Typus 1

Bisher wurden kommutative Gruppen betrachtet, deren Elemente *additiv* verknüpft werden, also Gruppen, die als Moduln bezeichnet werden. Die für solche Gruppen gültigen Gesetze können auf kommutative Gruppen übertragen werden, deren Elemente *multiplikativ* verknüpft werden. Bei solchen Gruppen wird ebenfalls von Erzeugenden und Basen gesprochen, und sie werden dementsprechend als *kommutative freie Gruppen von endlichem Typus* bezeichnet, oft auch als *unendliche freie Abelsche Gruppen von endlichem Rang.*

Im folgenden werden die soeben angedeuteten Zusammenhänge zwischen diesen beiden Arten von kommutativen Gruppen zunächst für den Fall $\varrho = 1$ beschrieben, und zwar ziemlich ausführlich, da diese Zusammenhänge für den Größenkalkül fundamental sind.

Ein besonders einfaches Beispiel eines Moduls über Z ist die Menge der ganzen Zahlen selbst; dieser Modul möge entsprechend der oben benutzten Bezeichnung mit Γ bezeichnet werden

$$\Gamma = \{ \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \}.$$

Die Elemente der Menge Γ bilden einen unendlichen freien Modul vom Typus 1 über dem Ring Z.

In der Tat, jedes Element von Γ kann durch $\alpha\,\omega_1$ dargestellt werden mit $\omega_1 = 1 \in \Gamma$ und $\alpha \in Z$. Somit ist $\omega_1 \in \Gamma$ eine Erzeugende von Γ. Die Relation $\alpha\,\omega_1 = 0$ zieht $\alpha = 0$ nach sich; somit ist das aus dem einzigen Element $\omega_1 = 1$ bestehende System von Erzeugenden von Γ eine Basis des Z-Moduls Γ, und die Menge Γ ist daher ein unendlicher freier Modul vom Typus 1.

Jetzt werde die Menge der ganzzahligen Potenzen eines Elementes m betrachtet:

$$\{ \ldots, m^{-2}, m^{-1}, m^0, m^1, m^2, \ldots \}.$$

Die Elemente dieser Menge, sie sei $\mathfrak{G}_0$ genannt, entstehen formal aus denen von Γ dadurch, daß die Elemente des Moduls Γ zu Exponenten von m gemacht werden. Über die Natur des hier auftretenden Elementes m wird keine Aussage gemacht, es wird nur gefordert, daß die Elemente der Menge $\mathfrak{G}_0$ die folgende Eigenschaft haben: *Die Elemente der Menge $\mathfrak{G}_0$ bilden multiplikativ verknüpft eine kommutative Gruppe.*

Grundlegend im Größenkalkül ist der folgende zwischen dem freien Modul Γ und der kommutativen Gruppe $\mathfrak{G}_0$ bestehende Zusammenhang.

Die kommutativen Gruppen Γ und $\mathfrak{G}_0$ sind isomorph.

Das heißt, daß sie die folgenden Eigenschaften haben:

1. Es besteht eine *bijektive* Abbildung der Elemente des Moduls Γ auf die Elemente der Gruppe $\mathfrak{G}_0$. Ist $f(\omega)$ das in $\mathfrak{G}_0$ gelegene Bild von $\omega \in \Gamma$, dann gilt
$$f(\omega) = m^\omega, \quad f^{-1}(m^\omega) = \omega.$$

2. Der Addition zweier Elemente ω und ω' aus Γ entspricht im Bild, d. h. in $\mathfrak{G}_0$ die Multiplikation von m^ω mit $m^{\omega'}$,
$$f(\omega + \omega') = f(\omega) \cdot f(\omega').$$

Das Bild der Summe der Originale ist also gleich dem Produkt der Bilder. Die sich entsprechenden Verknüpfungen „Addition" (in Γ) und „Multiplikation" (in $\mathfrak{G}_0$) werden als „homologe" Verknüpfungen bezeichnet.

Aus der zwischen Γ und $\mathfrak{G}_0$ bestehenden Isomorphie folgt:

Der im Modul Γ gültigen Beziehung

$$\alpha'(\alpha\,\omega) = (\alpha'\alpha)\,\omega$$

entspricht die in $\mathfrak{G}_0$ gültige Beziehung

$$(m^{\alpha\omega})^{\alpha'} = (m^{\omega})^{\alpha'\alpha}.$$

Insbesondere ist

$$(m^0)^{\alpha'} = m^0,$$

d. h. daß m^0, das neutrale Element von $\mathfrak{G}_0$, *idempotent* ist.

Wie oben gezeigt wurde, ist $\omega_1 = 1 \in \Gamma$ als Erzeugende des Moduls Γ eine Basis von Γ. Das in $\mathfrak{G}_0$ gelegene Bild von ω_1 ist $m^{\omega_1} = m$. Aus der Isomorphie von Γ und $\mathfrak{G}_0$ folgt, daß sich jedes Element von $\mathfrak{G}_0$ als Potenz von m^{ω_1} darstellen läßt

$$(m^{\omega_1})^{\alpha} = m^{\alpha\omega_1} = m^{\alpha}.$$

Dementsprechend wird $m^{\omega_1} = m$ als *Erzeugende* der kommutativen Gruppe $\mathfrak{G}_0$ vom Typus 1 bezeichnet.

Die Elemente von $\mathfrak{G}_0$ sind paarweise disjunkt, denn aus $m^{\alpha} = m^{\alpha'}$ folgt $\alpha = \alpha'$; insbesondere gilt $m^{\alpha} = m^0$ nur für $\alpha = 0$. Dementsprechend sagt man, daß m eine *Basis* von $\mathfrak{G}_0$ sei; $\mathfrak{G}_0$ wird als *freie kommutative Gruppe vom Typus 1* bezeichnet, auch als *unendliche zyklische Gruppe* mit der Erzeugenden m. Wäre $\mathfrak{G}_0$ eine *endliche* zyklische Gruppe, dann gäbe es ein $\alpha \neq 0$, so daß $m^{\alpha} = m^0$ wäre. Dann wäre m nur Erzeugende aber nicht Basis einer freien kommutativen Gruppe.

Im Größenkalkül wird jedes Element $m^{\alpha} \in \mathfrak{G}_0$ $(\alpha \in Z)$ zur Basis eines eindimensionalen Vektorraumes über dem Körper Ω der reellen (komplexen) Zahlen gemacht. Auf Grund der für einen Vektorraum geltenden Axiome ist

$$1 \cdot m^{\alpha} = m^{\alpha} \text{ (unitärer Modul).} \tag{2.1}$$

Andererseits ist, da m^0 das neutrale Element von $\mathfrak{G}_0$ ist,

$$m^0 \cdot m^{\alpha} = m^{\alpha}. \tag{2.2}$$

Daraus ergibt sich

$$m^0 \cdot m^{\alpha} = 1 \cdot m^{\alpha}, \tag{2.3}$$

d. h. *jedes Element von $\mathfrak{G}_0$ bleibt ungeändert, gleichgültig, ob es mit dem neutralen Element m^0 oder mit der Zahl 1 multipliziert wird.*

Hierzu sei noch bemerkt, daß bei der Multiplikation mit m^0 *interne* Komposition (Komposition zweier Elemente von $\mathfrak{G}_0$) vorliegt, dagegen bei der Multiplikation mit der Zahl 1 *externe* Komposition (Komposition eines Elementes von Ω mit einem Element von $\mathfrak{G}_0$).

Hier erhebt sich die Frage, ob aus der Gleichung (2.3) also aus der Eigenschaft, daß das neutrale Element m^0 und die Zahl 1 bei der Multiplikation dieselbe Wirkung auf jedes $m^x \in \mathfrak{G}_0$ haben, geschlossen werden kann, daß $m^0 = 1$ ist. Die Beantwortung dieser fundamentalen Frage erfordert einige Vorbereitungen.

Vorab sei daran erinnert, daß das oben eingeführte Element m nur implizite definiert ist, d. h. daß m mit irgendeinem mathematischen Objekt identifiziert werden kann, sofern dieses die folgende Eigenschaft hat (vgl. S. 20):

Das Element m ist Erzeugende einer unendlichen zyklischen Gruppe (Gruppenaxiom).

Da zunächst mehr über die Eigenschaften der Erzeugenden m nicht bekannt ist, kann beispielsweise angenommen werden, daß m eine reelle oder komplexe Zahl ist, etwa $m = 2$ oder $m = e$ oder $m = e^i$, wobei zu beachten ist, daß nicht jede Zahl Erzeugende einer *unendlichen* zyklischen Gruppe ist. Dann ist $m^0 = 1$, und die Zahl 1 ist infolgedessen gemeinsames Element von Ω und $\mathfrak{G}_0$. Es gilt also: *Ist $m \in \Omega$, dann ist $m^0 = 1$ und infolgedessen $\Omega \cap \mathfrak{G}_0 \neq \varnothing$.*

Im Größenkalkül wird aber von der Erzeugenden m eine gewisse Eigenschaft verlangt. Bei der Anwendung des Kalküls auf die Geometrie dient nämlich m als Symbol für die Längeneinheit „1 Meter". Entsprechend dieser physikalischen Bedeutung von m wird man verlangen, daß m keine Zahl sei, denn wäre m eine Zahl, dann wäre jede Länge eine Zahl, was innerhalb des Größenkalküls absurd ist.[1])

Um die soeben erwähnte Eigenschaft von m zu berücksichtigen, ist es notwendig, dem Gruppenaxiom ein weiteres geeignetes Axiom hinzuzufügen. Als ein solches Axiom bietet sich das folgende an: *Die Mengen Ω und $\mathfrak{G}_0$ sind disjunkt (Trennungsaxiom).*

Die Bedeutung dieses Axioms geht aus den nachstehend aufgeführten Äquivalenzen hervor.

Die Bedingungen

a) $\Omega \cap \mathfrak{G}_0 = \varnothing$, b) $Z \cap \mathfrak{G}_0 = \varnothing$, c) $m^0 \neq 1$

sind äquivalent, d. h. jede dieser Bedingungen zieht jede der beiden anderen nach sich.

a) $\Rightarrow$ b). Dies folgt unmittelbar aus $Z \subset \Omega$.

b) $\Rightarrow$ c). Wäre $m^0 = 1$, dann wäre $Z \cap \mathfrak{G}_0 \neq \varnothing$, entgegen der Voraussetzung.

c) $\Rightarrow$ a). Gäbe es ein Element von $\mathfrak{G}_0$, welches eine Zahl ist, etwa $m^\gamma \in \Omega$, dann würden die Elemente der Menge

$$\{ (m^\gamma)^\beta \mid \beta \in Z \}$$

eine Untergruppe von $\mathfrak{G}_0$ bilden, deren Elemente sämtlich Zahlen sind. Das neutrale Element dieser Untergruppe wäre $(m^\gamma)^0 = 1$. Da das neutrale

---

1) In diesem Paragraphen wird von dem in der physikalischen Literatur üblichen Brauch die Längeneinheit „1 Meter" durch m zu symbolisieren kein Gebrauch gemacht, da hier nur gefordert wird, daß m keine Zahl ist, was nicht impliziert, daß m eine Länge ist.

Element jeder Untergruppe von $\mathfrak{G}_0$ gleich dem neutralen Element von $\mathfrak{G}_0$ ist, wäre $m^0 = 1$, was im Widerspruch zu der Voraussetzung $m^0 \neq 1$ steht. Damit ist die Äquivalenz der drei Bedingungen nachgewiesen.

Es bleibt noch die Frage, ob es *mathematische Objekte* m gibt, welche gleichzeitig dem Gruppen- und Trennungsaxiom genügen. Daß es solche mathematischen Objekte gibt, geht aus den folgenden Beispielen hervor.

Beispiel 1. (ξ, ξ') und (η, η') seien zwei *Zahlenpaare.* Wird unter dem Produkt dieser beiden Zahlenpaare das Zahlenpaar $(\xi\eta, \xi'\eta')$ verstanden, und

$$m^\alpha = (1, 2^\alpha), \qquad \alpha \in Z$$

gesetzt, dann bilden die Zahlenpaare $(1, 2^\alpha)$ eine unendliche zyklische Gruppe mit der Erzeugenden $m = (1, 2)$ und dem neutralen Element $m^0 = (1, 1)$.

Aus diesem Beispiel ergeben sich leicht allgemeinere, indem man statt der Zahlenpaare geeignete ν-tupel von Zahlen betrachtet.

Beispiel 2. Die Menge der *Matrizen*

$$m^\alpha = \begin{pmatrix} 1, & \alpha \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in Z$$

bildet nach den Regeln der Matrizenmultiplikation verknüpft eine unendliche zyklische Gruppe. Erzeugende dieser Gruppe ist die Matrix

$$m = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix},$$

neutrales Element ist die Matrix

$$m^0 = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 3. Jede der *Funktionen*

$$f^\alpha(\xi) = \xi^{2^\alpha}, \qquad \alpha \in Z$$

bildet vermöge $\xi \to f^\alpha(\xi)$ das Segment $[0, 1]$ auf sich selbst ab. Die Menge dieser Funktionen bildet mit der durch $f^{\alpha+1}(\xi) = f(f^\alpha(\xi))$ erklärten Verknüpfung eine unendliche zyklische Gruppe. Erzeugende ist die Funktion $f(\xi) = \xi^2$, neutrales Element ist die Funktion $f^0(\xi) = \xi$. Somit kann m mit $f(\xi)$ identifiziert werden.

Beispiel 4. Unter η_α werde ein Element eines unendlichdimensionalen Vektorraumes verstanden, das in folgender Weise definiert ist:

$$\eta_\alpha = (\ldots, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \ldots), \qquad \alpha \in Z$$

$$\xi_\beta = \begin{cases} 1, \text{ wenn } \beta = \alpha, \\ 0, \quad ,, \quad \beta \neq \alpha, \end{cases} \qquad \beta \in Z.$$

Werden die Elemente η_α gemäß dem Gesetz

$$\eta_\alpha \cdot \eta_{\alpha'} = \eta_{\alpha+\alpha'}$$

verknüpft, dann bilden sie eine unendliche zyklische Gruppe. Erzeugende dieser Gruppe ist η_1, neutrales Element ist η_0. Danach kann m mit η_1 identifiziert werden.

Wie die Beispiele, die sich beliebig vermehren lassen, zeigen, können mathematische Objekte ganz verschiedener Art Erzeugende sein (Vektoren, Matrizen, Funktionen, Abbildungen).

Es bleibt noch zu klären, ob das Trennungsaxiom durch eine schwächere Forderung ersetzt werden kann. Wird davon ausgegangen, daß im Größenkalkül auf Grund der geometrischen Bedeutung von m weder m^1 noch m^2 noch m^3 Zahlen sein sollen, dann führt dies darauf zu verlangen, daß kein m^α mit $\alpha \neq 0$ eine Zahl sein soll. Demnach könnte beispielsweise gefordert werden: *Die Zahl 1 ist das einzige Ω und $\mathfrak{G}_0$ gemeinsame Element.* Diese Forderung ist schwächer als das Trennungsaxiom.

Werden die Auswirkungen des Trennungsaxioms mit denen der letzten Forderung verglichen, dann zeigt sich folgendes:

1. Ist das Trennungsaxiom erfüllt, dann kann der Isomorphismus $f(\omega) = m^\omega$ (Abbildung von Γ auf $\mathfrak{G}_0$) durch die in Abb. 1a angegebene Figur veranschaulicht werden. Charakteristisch für diese Figur ist die in bezug auf die Verbindungsgerade der Punkte „0" und „m^0" vorhandene Symmetrie; bei Spiegelung an der genannten Geraden werden die „positiven Elemente" mit den entsprechenden „negativen" vertauscht. Ferner ist *jedes* Element von $\mathfrak{G}_0$ in Beispiel 1 ein Zahlenpaar, in Beispiel 2 eine Matrix, usw.

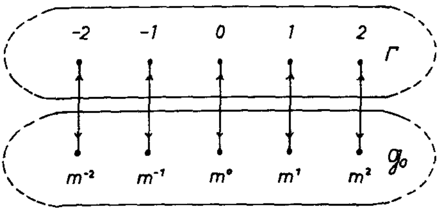

Abb. 1a
Der Isomorphismus $f(\omega) = m^\omega$ (mit Trennungsaxiom)

2. Ist die Zahl 1 das einzige Ω und $\mathfrak{G}_0$ gemeinsame Element, dann ergibt die Darstellung des Isomorphismus $f(\omega) = m^\omega$ die in Abb. 1b veranschaulichte Figur, welche die der Abb. 1a eigentümliche Symmetrie nicht mehr aufweist. Ferner ist *nicht jedes* Element von $\mathfrak{G}_0$ in Beispiel 1 ein Zahlenpaar, in Beispiel 2 eine Matrix, usw. *Mit der Zahl 1 kommt hier ein Element in $\mathfrak{G}_0$ hinein, dessen Natur von der der übrigen Elemente verschieden ist.*

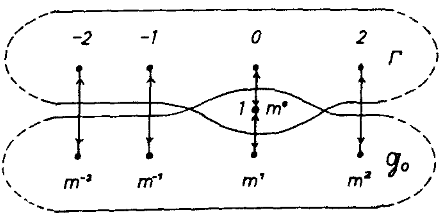

Abb. 1b
Der Isomorphismus $f(\omega) = m^\omega$ (ohne Trennungsaxiom)

Aus diesem Vergleich geht hervor, daß die algebraische Struktur des Größenkalküls in ihrem Aufbau einfacher wird, wenn das Trennungsaxiom benutzt wird. Es wurde daher sowohl der vorliegenden als auch der Arbeit [1] das Trennungsaxiom zugrunde gelegt.

Wird das Trennungsaxiom zugrunde gelegt, dann ist die oben gestellte Frage, ob $m^0 = 1$ gesetzt werden kann, zu verneinen. Es sei aber an die Gleichung

$$m^0 \cdot m^\alpha = 1 \cdot m^\alpha \tag{2.3}$$

erinnert, welche besagt, daß bei multiplikativer Verknüpfung jeder der voneinander verschiedenen Faktoren m^0 und 1 dieselbe Wirkung auf jedes Element von $\mathfrak{G}_0$ hat. Schließlich sei noch angemerkt, daß in der Literatur an Stelle vom m^{-1} oft $1/m$ geschrieben wird. Diese Schreibweise sollte, da sie zu Mißverständnissen Anlaß gibt, vermieden werden.

§ 3. Anwendung auf die Geometrie

In der Geometrie hat man es mit Längen, Flächen- und Rauminhalten, ebenen und räumlichen Winkeln und anderen geometrischen Größen zu tun. Es werden zunächst Größen wie Längen, Flächen- und Rauminhalte betrachtet. Der Größe „Länge" werde ein Element l zugeordnet, wobei l das allgemeine Element des Vektorraumes der Längen bedeutet. Das der Größe „Flächeninhalt" zugeordnete Element sei gekennzeichnet durch das Produkt zweier Längen, also durch

$$a = l \cdot l = l^2;$$

das der Größe „Rauminhalt" zugeordnete Element durch das Produkt dreier Längen, also durch

$$v = l \cdot l \cdot l = l^3.$$

Dies führt dazu, diejenigen Potenzen von l zu betrachten, die als Exponenten eine natürliche Zahl haben, also die Menge

$$\mathfrak{S} = \{\, l^1, l^2, l^3, \ldots \,\}.$$

Die Elemente von $\mathfrak{S}$ bilden, multiplikativ verknüpft, eine kommutative Semigruppe, d. h. sie bilden eine Halbgruppe mit *regulären* Elementen.

In der Tat, ist (μ, ν) ein Paar natürlicher Zahlen, also $(\mu, \nu) \in N^2$, wobei N die Menge der natürlichen Zahlen bedeutet, dann gilt

$$l^\mu \cdot l^\nu = l^{\mu+\nu},$$

d. h. daß interne Komposition vorliegt. Sowohl das assoziative als auch das kommutative Gesetz ist erfüllt. Die Elemente von $\mathfrak{S}$ sind *regulär*, d. h. aus

$$l^\mu \cdot x = l^\mu \cdot x', \qquad x \in \mathfrak{S}, \qquad x' \in \mathfrak{S}, \qquad \mu \in N \tag{3.1}$$

folgt

$$x = x'.$$

Dies ergibt sich durch Einsetzen von $x = l_\nu$ und $x' = l^{\nu'}$ in (3.1) aus der Eigenschaft der Elemente von $\mathfrak{S}$ paarweise disjunkt zu sein.

Im folgenden werde unter dem Element $\mathrm{m} \in \mathfrak{G}_0$ das der Längeneinheit „Meter" zugeordnete verstanden, m sei also Basis des Vektorraumes der Längen, und es werde die folgende Abbildung betrachtet:

$$f(l^{\mu}) = \mathrm{m}^{\mu}, \qquad \mu \in N.$$

Durch diese Abbildung wird jedem Element von $\mathfrak{S}$ eine Potenz von m zugeordnet, deren Exponent eine natürliche Zahl ist; $\mathfrak{S}$ wird also abgebildet auf die Menge

$$\mathfrak{G}_0{}' = \{\, \mathrm{m}^1, \mathrm{m}^2, \mathrm{m}^3, \ldots \,\},$$

welche eine Teilmenge von $\mathfrak{G}_0$ ist. Diese Abbildung, die kurz $f(\mathfrak{S}) = \mathfrak{G}_0'$ geschrieben werden kann, ist *bijektiv*. Sie zeigt an, daß Längen in m^1, Flächeninhalte in m^2 und Rauminhalte in m^3 zu messen sind.

Die Elemente von $\mathfrak{G}_0'$ bilden ebenso wie die von $\mathfrak{S}$ eine Semigruppe. Die Abbildung $f(\mathfrak{S}) = \mathfrak{G}_0'$ ist ein *Isormorphismus*, denn das Bild des Produktes zweier Elemente von $\mathfrak{S}$ ist gleich dem Produkt der Bilder der entsprechenden Elemente von $\mathfrak{G}_0'$. Dieser Zusammenhang ist in Abb. 2 veranschaulicht.

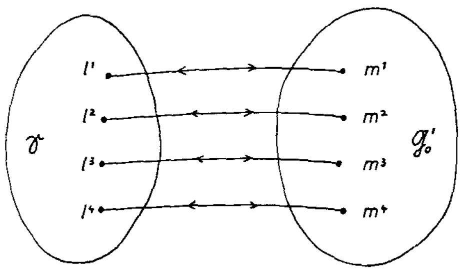

Abb. 2
Darstellung des Isomorphismus $f(\mathfrak{S}) = \mathfrak{G}_0{}'$

Neben den soeben betrachteten geometrischen Größen, denen Elemente von $\mathfrak{S}$ zugeordnet sind, also Elemente, die sich durch Potenzen von l mit natürlichen Zahlen als Exponenten darstellen lassen, treten der *ebene Winkel* und der *räumliche Winkel* auf.

Es werden die folgenden Annahmen gemacht:

a) Es gibt eine der Größe „ebener Winkel" zugeordnetes Element y, welches der Beziehung

$$l = l \cdot y \tag{3.2}$$

genügt.

b) Es gibt ein der Größe „räumlicher Winkel" zugeordnetes Element z, welches der Beziehung

$$l^2 = l^2 \cdot z \tag{3.3}$$

genügt.

Die erste Beziehung bringt zum Ausdruck, daß „die Bogenlänge gleich der Länge des Radius mal dem ebenen Winkel" ist, die zweite, daß „die auf der Kugeloberfläche durch den räumlichen Winkel ausgeschnittene Fläche gleich dem Quadrat des Kugelradius mal dem räumlichen Winkel" ist. Von welcher

Art die durch die Gleichungen (3.2) und (3.3) eingeführten Elemente y und z sind, wird Gegenstand der nachfolgenden Untersuchungen sein.

In Verallgemeinerung der Gleichungen (3.2) und (3.3) wird man darauf geführt, Gleichungen der folgenden Art zu betrachten:

$$l^\mu = l^\nu \cdot x, \qquad (\mu, \nu) \in N^2. \tag{3.4}$$

a) Ist $\mu > \nu$, dann ist $x = l^{\mu-\nu} \in \mathfrak{S}$ die einzige Lösung der Gleichung (3.4).

b) Ist $\mu \leqq \nu$, wie beispielsweise in den Gleichungen (3.2) und (3.3), dann gibt es kein Element von $\mathfrak{S}$, welches Lösung der Gleichung (3.4) ist. Es können also weder y noch z Elemente von $\mathfrak{S}$ sein, und die Gleichung (3.4) hat daher für $\mu \leqq \nu$ zunächst nur formale Bedeutung.

Um hier weiterzukommen, insbesondere etwas über die Natur der Elemente y und z sagen zu können, bedarf es besonderer Überlegungen. Es handelt sich nämlich um die fundamentale Frage, wie die Division, die zwar für $\mu > \nu$ ausführbar ist, für alle $(\mu, \nu) \in N^2$ möglich gemacht werden kann.

In der Gleichung (3.4) kommen die Elemente l^μ und l^ν vor, die beide Elemente von $\mathfrak{S}$ sind. Eine Gleichung wie (3.4) ist durch das *geordnete Paar* (l^μ, l^ν) in eindeutiger Weise bestimmt. So ist beispielsweise die für y (ebener Winkel) geltende Gleichung (3.2) durch das Paar (l, l) bestimmt, die für z (räumlicher Winkel) geltende Gleichung (3.3) durch das Paar (l^2, l^2). Jedes solche Paar ist Element der Menge $\mathfrak{S}^2$. Hierdurch wird man darauf geführt, an Stelle der Menge $\mathfrak{S}$ die Menge $\mathfrak{S}^2$ zu betrachten, die äquivalent der Menge der Gleichungen (3.4) ist.

Für $\mu > \nu$ und $\mu' > \nu'$ hat jede der beiden Gleichungen $l^\mu = l^\nu \cdot x$ und $l^{\mu'} = l^{\nu'} \cdot x'$ in $\mathfrak{S}$ genau eine Lösung. Durch Multiplikation dieser beiden Gleichungen ergibt sich die Gleichung

$$l^{\mu+\mu'} = l^{\nu+\nu'} \cdot (x\,x'),$$

d. h. daß das Produkt $x\,x'$ Lösung der durch das Paar $(l^{\mu+\mu'}, l^{\nu+\nu'})$ gegebenen Gleichung ist. Dementsprechend werde auf der Menge $\mathfrak{S}^2$ die folgende multiplikative Verknüpfung erklärt:

Definition. Unter dem Produkt der Elemente $(l^\mu, l^\nu) \in \mathfrak{S}^2$ und $(l^{\mu'}, l^{\nu'}) \in \mathfrak{S}^2$ *werde das Paar*

$$(l^{\mu+\mu'}, l^{\nu+\nu'}) \in \mathfrak{S}^2$$

verstanden.

Bei der soeben definierten multiplikativen Verknüpfung liegt interne Komposition vor, außerdem ist die Verknüpfung kommutativ und assoziativ. Demnach bilden die Elemente von $\mathfrak{S}^2$ multiplikativ verknüpft eine kommutative Halbgruppe, aber sie bilden keine Gruppe, da es kein neutrales Element gibt.

Ist $\mu > \nu$, dann hat die dem Paar (l^μ, l^ν) entsprechende Gleichung $l^\mu = l^\nu \cdot x$ die Lösung $x = l^{\mu-\nu} \in \mathfrak{S}$, und diese Lösung hat als Bild $\mathrm{m}^{\mu-\nu} \in \mathfrak{G}_0$. Dementsprechend werde die Abbildung

$$f(l^\mu, l^\nu) = \mathrm{m}^{\mu-\nu}$$

eingeführt und gefordert, daß diese Abbildung für *sämtliche* Elemente von $\mathfrak{S}^2$

gelte, also nicht nur für die Elemente der durch $\mu > \nu$ definierten Teilmenge von $\mathfrak{S}^2$. Es sei also für jedes $(\mu, \nu) \in N^2$

$$f(l^\mu, l^\nu) = \mathrm{m}^{\mu-\nu}, \tag{3.5}$$

kurz geschrieben

$$f(\mathfrak{S}^2) = \mathfrak{G}_0.$$

Durch diese Abbildung wird jedem Element von $\mathfrak{S}^2$ genau ein Element von $\mathfrak{G}_0$ zugeordnet. Ferner gibt es zu jedem Element von $\mathfrak{G}_0$ *mindestens ein Element* von $\mathfrak{S}^2$, d. h. daß die Abbildung $f(\mathfrak{S}^2) = \mathfrak{G}_0$ *surjektiv* ist.

Haben die beiden Elemente (l^μ, l^ν), $(l^{\mu'}, l^{\nu'})$ der Menge $\mathfrak{S}^2$ die Eigenschaft, daß

$$\mu - \nu = \mu' - \nu'$$

ist, dann haben sie beide in $\mathfrak{G}_0$ dasselbe Bild, nämlich $\mathrm{m}^{\mu-\nu}$. Demnach ist die Abbildung $f(\mathfrak{S}^2) = \mathfrak{G}_0$ *nicht bijektiv*, d. h. daß verschiedenen Elementen von $\mathfrak{S}^2$ ein und dasselbe Element von $\mathfrak{G}_0$ zugeordnet sein kann.

Sind (l^μ, l^ν) und $(l^{\mu'}, l^{\nu'})$ irgend zwei Elemente von $\mathfrak{S}^2$, dann ist ihr Produkt $(l^{\mu+\mu'}, l^{\nu+\nu'})$. Das Bild des Produktes ist $\mathrm{m}^{(\mu+\mu')-(\nu+\nu')} = \mathrm{m}^{(\mu-\nu)+(\mu'-\nu')}$, also gleich dem Produkt der Bilder. Somit gilt:

Die Abbildung $f(\mathfrak{S}^2) = \mathfrak{G}_0$ ist ein Homomorphismus.

Es interessiert, die Menge derjenigen Elemente von $\mathfrak{S}^2$ zu kennen, die in $\mathfrak{G}_0$ dasselbe Bild haben. Zwei Elemente von $\mathfrak{S}^2$, die in $\mathfrak{G}_0$ dasselbe Bild haben, seien *äquivalent* genannt. Die beiden Elemente (l^μ, l^ν) und $(l^{\mu'}, l^{\nu'}) \in \mathfrak{S}^2$ sind genau dann äquivalent, wenn

$$(R) \qquad \mu - \nu = \mu' - \nu'$$

ist. Man schreibt dann

$$(l^\mu, l^\nu) \equiv (l^{\mu'}, l^{\nu'}) \pmod{R}.$$

Die Relation (R) ist reflexiv, symmetrisch und transitiv, sie ist also eine *Äquivalenzrelation.*

Die Äquivalenzrelation (R) kann wie folgt gedeutet werden. Es sei u eine Lösung der Gleichung (3.4) für ein gegebenes Paar $(\mu, \nu) \in N^2$, es gelte also

$$l^\mu = l^\nu \cdot u.$$

Dann gilt aber auch, wenn die letzte Gleichung auf beiden Seiten mit $l^\varkappa$ $(\varkappa \in N)$ multipliziert wird

$$l^{\mu+\varkappa} = l^{\nu+\varkappa} \cdot u.$$

Wird $\mu' = \mu + \varkappa$, $\nu' = \nu + \varkappa$ gesetzt, so ist

$$\mu' - \nu' = \mu - \nu.$$

Die Äquivalenzrelation (R) besagt demnach, daß es unendlich viele Gleichungen vom Typus (3.4) gibt, welche dieselbe Lösung wie die ursprüngliche Gleichung $l^\mu = l^\nu \cdot x$ haben. Äquivalenten Elementen von $\mathfrak{S}^2$, also äquivalenten Paaren, entsprechen äquivalente Gleichungen.

Durch die Äquivalenzrelation (R) werden die Elemente von $\mathfrak{S}^2$ in disjunkte Klassen eingeteilt; alle Elemente von $\mathfrak{S}^2$, die in $\mathfrak{G}_0$ dasselbe Bild haben, werden derselben Klasse zugerechnet. Die Menge der disjunkten Klassen, in welche $\mathfrak{S}^2$ durch die Äquivalenzrelation (R) zerlegt wird, wird die Quotientenmenge von $\mathfrak{S}^2$ in bezug auf (R) genannt und mit $\mathfrak{S}^2/R$ bezeichnet.

Eine Klasse ist durch irgendein zu ihr gehörendes Paar (l^μ, l^ν) eindeutig gekennzeichnet, da sämtliche übrigen der Klasse angehörenden Paare durch die Äquivalenzrelation (R) bestimmt sind. Die zu dem Paar (l^μ, l^ν) gehörende Klasse sei mit $[l^\mu, l^\nu]$ bezeichnet.

Zwischen den Klassen, also den Elementen der Menge $\mathfrak{S}^2/R$, kann eine multiplikative Verknüpfung erklärt werden:

$$(M) \qquad [l^\mu, l^\nu] \cdot [l^{\mu'}, l^{\nu'}] = [l^{\mu+\mu'}, l^{\nu+\nu'}].$$

Mit der Verknüpfung (M) *bilden die Elemente von* $\mathfrak{S}^2/R$, *also die Klassen, in welche* $\mathfrak{S}^2$ *durch die Äquivalenzrelation* (R) *zerlegt wird, eine kommutative Gruppe.*

Das *neutrale* Element dieser Gruppe ist die Klasse $[l, l]$, das zu $[l^\mu, l^\nu]$ *inverse* Element ist $[l^\nu, l^\mu]$.

Es gibt eine *bijektive* Abbildung von $\mathfrak{S}^2/R$ auf $\mathfrak{G}_0$, nämlich

$$f([l^\mu, l^\nu]) = \mathrm{m}^{\mu-\nu}. \tag{3.6}$$

Multipliziert man die Bilder der auf der linken Seite von (M) stehenden Faktoren, also $\mathrm{m}^{\mu-\nu}$ und $\mathrm{m}^{\mu'-\nu'}$, so ergibt sich das Bild der rechten Seite von (M). Somit ist das Produkt der Bilder gleich dem Bild des Produktes, woraus folgt, daß die Gruppen $\mathfrak{S}^2/R$ und $\mathfrak{G}_0$ *isomorph* sind.

Es bleibt noch zu zeigen, in welcher Weise die Menge $\mathfrak{S}$ in die Menge $\mathfrak{S}^2/R$ „eingebettet" werden kann. Zunächst stellt man fest, daß das Element $l^\mu \in \mathfrak{S}$ in $\mathfrak{G}_0$ dasselbe Bild hat wie die Klasse $[l^{\mu+1}, l] \in \mathfrak{S}^2/R$, nämlich m^μ. D. h., daß $\mathfrak{S}$ bijektiv auf die Menge der Klassen $\{ [l^{\mu+1}, l] \mid \mu \in N \}$ abgebildet werden kann. Von dieser Abbildung läßt sich zeigen, daß sie mit den oben für $\mathfrak{S}$ bzw. $\mathfrak{S}^2$ angegebenen multiplikativen Verknüpfungen ein *Isomorphismus* ist.

Werden jetzt in der für $\mu \leqq \nu$ sinnlosen Gleichung (3.4) die Elemente von $\mathfrak{S}$ durch die entsprechenden Elemente von $\mathfrak{S}^2/R$ ersetzt, so gelangt man zu der (auch für $\mu \leqq \nu$) sinnvollen Gleichung

$$[l^{\mu+1}, l] = [l^{\nu+1}, l] \cdot x. \tag{3.7}$$

Es wird nach einer *Klasse* x gefragt, die dieser Gleichung genügt. Die Gleichung (3.7) hat, da die Elemente von $\mathfrak{S}^2/R$ eine Gruppe bilden, genau eine Lösung. Diese wird erhalten, indem man beide Seiten der Gleichung mit dem inversen Element von $[l^{\nu+1}, l]$, also mit $[l, l^{\nu+1}]$ multipliziert.

$$x = [l^\mu, l^\nu]. \qquad (\mu, \nu) \in N^2.$$

Diese Klasse hat als Bild in $\mathfrak{G}_0$ das Element $\mathrm{m}^{\mu-\nu}$, $(\mu, \nu) \in N^2$. Damit sind die Lösungen der Gleichungen (3.7) für alle Zahlenpaare $(\mu, \nu) \in N^2$ beschrieben, die Division ist somit auf $\mathfrak{S}^2/R$ immer möglich.

Die soeben beschriebenen Zusammenhänge können mit Hilfe der Abb. 3 erläutert werden. Wegen der Bedeutung und weiterer Beispiele von Bildern dieser Art sei auf [7] verwiesen. In der Abb. 3 sind veranschaulicht:

a) Elemente der Menge $\mathfrak{S}^2$ (durch Punkte dargestellt).

b) Elemente der Menge $\mathfrak{S}^2/R$ (gestrichelt umrandet).

c) Elemente der Menge $\mathfrak{G}_0$ (durch Punkte dargestellt).

d) der Homomorphismus $f(\mathfrak{S}^2) = \mathfrak{G}_0$ (durch mit Pfeilen versehene Linien dargestellt).

e) Der Isomorphismus $f_1(\mathfrak{S}^2/R) = \mathfrak{G}_0$ (durch gestrichelte Linien mit Doppelpfeil dargestellt).

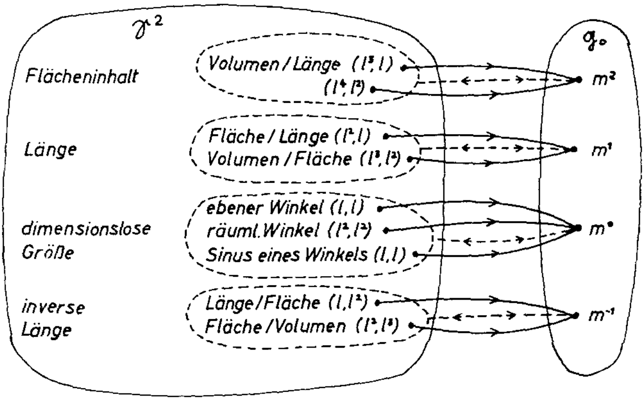

Abb. 3. Darstellung des Homomorphismus $f(\mathfrak{S}^2) = \mathfrak{G}_0$ und des Isomorphismus $f_1(\mathfrak{S}^2/R) = \mathfrak{G}_0$ ($\mathfrak{G}_0$ freie kommutative Gruppe vom Typus 1)

Die Eigenschaft, daß durch die Abbildung $f(\mathfrak{S}^2) = \mathfrak{G}_0$ jedem Element von $\mathfrak{S}^2$ genau ein Element von $\mathfrak{G}_0$ zugeordnet ist, kommt in der Figur dadurch zum Ausdruck, daß von jedem Punkte von $\mathfrak{S}^2$ genau ein Pfeil ausgeht, der in einem Punkte von $\mathfrak{G}_0$ endet. Da die Abbildung surjektiv ist, endet in jedem Punkte von $\mathfrak{G}_0$ *mindestens* ein Pfeil. Aus dem soeben Dargelegten folgt, daß in jedem Punkte von $\mathfrak{G}_0$ abzählbar unendlich viele Pfeile enden, von denen in die Figur selbstverständlich nur einige eingezeichnet werden konnten. Alle Punkte von $\mathfrak{S}^2$, deren Pfeile in ein und demselben Punkte von $\mathfrak{G}_0$ enden, gehören derselben Klasse an; eine Klasse ist also gekennzeichnet durch denjenigen Punkt in $\mathfrak{G}_0$, in welchem die Pfeile sämtlicher Elemente der betreffenden Klasse enden. Die Klassen von $\mathfrak{S}^2$ sind in der Figur durch eine gestrichelte Umrandung gekennzeichnet. Zu jeder Klasse, also zu jedem Element von $\mathfrak{S}^2/R$ gibt es genau ein Element von $\mathfrak{G}_0$. Man kann hier, wie aus der Figur zu ersehen ist, von einer „Klasse der Längen" sprechen, einer „Klasse der Flächeninhalte", einer „Klasse der Rauminhalte". Die Klasse, die als Bild $m^0 \in \mathfrak{G}_0$ hat, möge als die „Klasse der dimensionslosen Größen" bezeichnet werden. Neuerdings werden diese Größen auch „Verhältnisgrößen" genannt (vgl. [8]). Zu der letzten Klasse gehören die Elemente (l, l) und (l^2, l^2), also auch die den Größen „ebener Winkel“ und „räumlicher Winkel“ zugeordneten Elemente y und z, die Elemente von $\mathfrak{S}^2$ sind. Damit ist die eingangs noch offengelassene Frage nach der Art der Elemente y und z beantwortet.

Wie diese Ergebnisse zeigen, ist es keineswegs ein Ausnahmefall, daß zwei verschiedenen Größen zugeordnete Elemente von $\mathfrak{S}^2$ das gleiche Bild in $\mathfrak{G}_0$ haben, d. h., daß die entsprechenden Elemente von $\mathfrak{S}^2$ in der gleichen Einheit zu messen sind. Dies ist beispielsweise der Fall bei den den Größen „ebener Winkel“ und „räumlicher Winkel“ zugeordneten Elementen $y \in \mathfrak{S}^2$ und $z \in \mathfrak{S}^2$, die beide in der Einheit m^0 zu messen sind. Die hier beschriebene Erscheinung, daß zwei verschiedenen Größen zugeordnete Elemente von $\mathfrak{S}^2$ in derselben Einheit zu messen sind, ist seit langem bekannt, aber bisher nicht sonderlich beachtet worden. Das bekannteste Beispiel hierfür stammt aus der Mechanik, wo die dem Drehmoment und der Energie zugeordneten Elemente in derselben Einheit gemessen werden. Von diesem Beispiel wird unten noch einmal die Rede sein.

Als Ergebnis dieser Untersuchungen sei festgehalten:

Wird den Betrachtungen in der Geometrie die freie kommutative Gruppe $\mathfrak{G}_0$ vom Typus 1 mit dem allgemeinen Element m^α $(\alpha \in Z)$ *zugrunde gelegt, dann können als Einheiten nur Elemente von $\mathfrak{G}_0$ auftreten.*

In der einschlägigen Literatur ist es üblich, als Einheit von y nicht m^0, sondern rad (Radiant) anzugeben, als Einheit von z nicht m^0, sondern sr (Steradiant). Dazu ist zu sagen, daß Einheiten wie rad und sr nicht Elemente der freien kommutativen Gruppe $\mathfrak{G}_0$ mit dem allgemeinen Element m^α $(\alpha \in Z)$, hier also nicht am Platze sind. Eine andere Frage ist, ob eine Winkeleinheit, etwa rad (Radiant), zusammen mit der Längeneinheit m (Meter) eine Basis bilden kann. Diese Frage wird in § 6 behandelt werden.

Eine besondere Rolle im Größenkalkül kommt den „dimensionslosen Größen“ zu. Gemäß den oben gemachten Annahmen sind die dimensionslosen Größen der Geometrie durch

$$x = \xi\, \mathrm{m}^0, \qquad \xi \in \Omega$$

gekennzeichnet. Danach ist beispielsweise das dem ebenen Winkel zugeordnete Element y eine solche Größe.

Die dimensionslosen Größen bilden einen kommutativen Körper K, der isomorph zu dem Körper Ω ist. Ein Beweis hierfür ist in [1], § 7, S. 43, gegeben.

Die Bedeutung der dimensionslosen Größen rührt nicht zuletzt von der Eigenschaft her, daß von diesen Größen beliebige Funktionen gebildet werden können. Es gilt der folgende

Satz. Ist $x = \xi$ m^0 *eine dimensionslose Größe, also $x \in K$ und $h(x)$ eine beliebige Funktion von x, dann ist*

$$h(x) = (h(\xi))\, \mathrm{m}^0.$$

Wegen eines Beweises dieses Satzes sei auf [1], § 13, S. 57, verwiesen. Hier sei nur angemerkt, daß der Beweis daraus folgt, daß die Elemente von K einen zu dem Körper Ω isomorphen Körper bilden. Aus dem letzten Satz folgt, daß

h und x derselben Klasse angehören, also in $\mathfrak{G}_0$ dasselbe Bild haben; es ist somit

$$f(h) = f(x) = \mathrm{m}^0,$$

d. h.:

Jede Funktion einer dimensionslosen Größe ist eine dimensionslose Größe.

Danach ist beispielsweise

$$\sin(\xi\,\mathrm{m}^0) = (\sin\xi)\,\mathrm{m}^0;$$

entsprechendes gilt für die übrigen trigonometrischen Funktionen und die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen, etwa

$$\arcsin(\xi\,\mathrm{m}^0) = (\arcsin\xi)\,\mathrm{m}^0.$$

Ferner ist

$$e^{(\xi\,\mathrm{m}^0)} = (e^{\xi})\,\mathrm{m}^0, \qquad \ln(\xi\,\mathrm{m}^0) = (\ln\xi)\,\mathrm{m}^0.$$

§ 4. Freie Moduln vom Typus 2

Bei der Anwendung des Größenkalküls auf die Geometrie wurde den Betrachtungen ein freier Modul vom Typus 1 zugrunde gelegt. Sobald aber die Anwendung des Kalküls auf die Kinematik oder auf die Dynamik ausgedehnt werden soll, wird es erforderlich, freie Moduln von höherem als dem Typus 1 heranzuziehen. Im folgenden sollen die Eigenschaften der freien Moduln vom Typus 2 beschrieben und deren Anwendung auf die Kinematik erörtert werden.

Es wird die Menge der Paare von ganzen Zahlen, also die Menge Z^2 betrachtet. Gemäß dem unten stehenden Schema kann diese Menge durch die Punkte eines ebenen Gitters veranschaulicht werden.

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & -2,1 & -1,1 & 0,1 & 1,1 & 2,1 & \cdots \\
\cdots & -2,0 & -1,0 & 0,0 & 1,0 & 2,0 & \cdots \\
\cdots & -2,-1 & -1,-1 & 0,-1 & 1,-1 & 2,-1 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Diese Menge werde im folgenden mit Γ bezeichnet, ihre Elemente mit (α, β), $(\alpha', \beta'), \ldots$. Wird durch

$$(\alpha, \beta) + (\alpha', \beta') = (\alpha + \alpha', \beta + \beta')$$

eine additive Verknüpfung auf Γ erklärt, dann bilden die Elemente von Γ eine kommutative Gruppe. Dieses sieht man wie folgt ein.

1. Die Summe zweier Paare ist wieder ein Element der Menge Γ.
2. Für die Addition gelten das assoziative und das kommutative Gesetz.
3. Es gibt ein neutrales Element; dieses ist hier das Zahlenpaar $(0, 0)$, denn es ist

$$(\alpha, \beta) + (0, 0) = (\alpha, \beta),$$

welches auch das Element (α, β) sein mag. Es gibt ein und nur ein neutrales Element.

4. Zu jedem Element (α, β) gibt es ein und nur ein inverses Element, hier symmetrisches Element genannt. Das zu dem Element (α, β) symmetrische ist $(-\alpha, -\beta)$, denn es ist

$$(\alpha, \beta) + (-\alpha, -\beta) = (0, 0).$$

Bemerkung. Das zu $(0, 0)$ symmetrische Element ist $(0, 0)$. Die Symmetrie kann geometrisch interpretiert werden; sie bedeutet Spiegelung am Punkte $(0, 0)$.

Die Elemente der kommutativen Gruppe Γ bilden einen freien Modul vom Typus 2 über dem Ring Z der ganzen Zahlen. In der Tat, jedes Element $\omega = (\alpha, \beta) \in \Gamma$ kann dargestellt werden durch

$$\omega = \alpha\,\omega_1 + \beta\,\omega_2 = \alpha(1, 0) + \beta(0, 1), \qquad (\alpha, \beta) \in Z^2.$$

Somit sind $\omega_1 = (1, 0)$ und $\omega_2 = (0, 1)$ *Erzeugende* des Moduls Γ. Diese Erzeugenden sind *linear unabhängig*, denn die Gleichung

$$\alpha(1, 0) + \beta(0, 1) = (0, 0)$$

zieht $\alpha = 0$, $\beta = 0$ nach sich. Somit bilden die Elemente ω_1, ω_2 eine *Basis* von Γ, und damit ist gezeigt, daß Γ ein unendlicher freier Modul vom Typus 2 ist.

Γ kann kein endlicher Modul sein, denn dann hätte Γ keine Basis.

Es sei $(\alpha, \beta) \in \Gamma$, und es werde die Menge mit den Elementen $m^\alpha s^\beta$ betrachtet. Sie sei im folgenden mit $\mathfrak{S}_0$ bezeichnet. Dabei bedeute m die Längeneinheit „1 Meter" (Basis des Vektorraumes der Längen) und s die Zeiteinheit „1 Sekunde" (Basis des Vektorraumes der Zeitdifferenzen). Entsprechend dem untenstehenden Schema kann die Menge $\mathfrak{S}_0$ durch die Punkte eines ebenen Gitters veranschaulicht werden.

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & m^{-2}\,s^{1} & m^{-1}\,s^{1} & m^{0}\,s^{1} & m^{1}\,s^{1} & m^{2}\,s^{1} & \cdots \\
 & & & \vdots & & & \\
\cdots & m^{-2}\,s^{0} \;-- & m^{-1}\,s^{0} \;-- & m^{0}\,s^{0} \;-- & m^{1}\,s^{0} \;-- & m^{2}\,s^{0} & \cdots \\
 & & & \vdots & & & \\
\cdots & m^{-2}s^{-1} & m^{-1}\,s^{-1} & m^{0}s^{-1} & m^{1}\,s^{-1} & m^{2}\,s^{-1} & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

$\mathfrak{S}_0$ entsteht formal aus Γ dadurch, daß die Elemente von Γ zu Exponentenpaaren des Paares (m, s) gemacht werden.

Sind $m^\alpha s^\beta$ und $m^{\alpha'} s^{\beta'}$ irgend zwei Elemente von $\mathfrak{S}_0$, dann sei ihr *Produkt* $m^{\alpha+\alpha'} s^{\beta+\beta'}$, also ebenfalls ein Element der Menge $\mathfrak{S}_0$. Die Elemente der Menge $\mathfrak{S}_0$ bilden multiplikativ verknüpft eine *kommutative Gruppe*, was an Hand der Gruppenaxiome unmittelbar bestätigt werden kann. Das neutrale Element dieser Gruppe ist $m^0\,s^0$, das zu $m^\alpha s^\beta$ inverse Element ist $m^{-\alpha}\,s^{-\beta}$. Das neutrale Element $m^0\,s^0$ ist *idempotent*, d. h. es ist

$$(m^0\,s^0)^\alpha = m^0\,s^0.$$

Die kommutativen Gruppen Γ und $\mathfrak{G}_0$ sind isomorph. Es besteht eine bijektive Abbildung des Moduls Γ auf die Gruppe $\mathfrak{G}_0$. Ist $f(\omega)$ das in $\mathfrak{G}_0$ gelegene Bild von $\omega = (\alpha, \beta) \in \Gamma$, dann gilt

$$f(\omega) = \mathrm{m}^\alpha\,\mathrm{s}^\beta \quad \text{und} \quad f^{-1}\,(\mathrm{m}^\alpha\,\mathrm{s}^\beta) = (\alpha, \beta) = \omega.$$

Ferner ist für $\omega, \omega' \in \Gamma$

$$f\,(\omega + \omega') = f(\omega) \cdot f(\omega'),$$

d. h. das Bild der Summe zweier Elemente von Γ ist gleich dem Produkt der Bilder der Summanden. Demnach sind Addition (in Γ) und Multiplikation (in $\mathfrak{G}_0$) *homologe* Verknüpfungen.

$\mathfrak{G}_0$ ist eine kommutative freie Gruppe vom Typus 2. In der Tat, die Elemente $\omega_1 = (1, 0)$ und $\omega_2 = (0, 1)$ bilden eine Basis des Moduls Γ. Die in $\mathfrak{G}_0$ gelegenen Bilder von ω_1 bzw. ω_2 sind $\mathrm{m}^1\,\mathrm{s}^0$ bzw. $\mathrm{m}^0\,\mathrm{s}^1$. Aus der Isomorphie von Γ und $\mathfrak{G}_0$ folgt, daß sich jedes Element von $\mathfrak{G}_0$ darstellen läßt in der Form

$$\mathrm{m}^\alpha\,\mathrm{s}^\beta = (\mathrm{m}^1\,\mathrm{s}^0)^\alpha \cdot (\mathrm{m}^0\,\mathrm{s}^1)^\beta.$$

Somit sind $\mathrm{m}^1\,\mathrm{s}^0$ und $\mathrm{m}^0\,\mathrm{s}^1$ *Erzeugende* der kommutativen Gruppe $\mathfrak{G}_0$. Ferner zieht $(\mathrm{m}^1\,\mathrm{s}^0)^\alpha \cdot (\mathrm{m}^0\,\mathrm{s}^1)^\beta = \mathrm{m}^0\,\mathrm{s}^0$ nach sich $(\alpha, \beta) = (0, 0)$, d. h. daß die Elemente $\mathrm{m}^1\,\mathrm{s}^0$ und $\mathrm{m}^0\,\mathrm{s}^1$ eine *Basis* von $\mathfrak{G}_0$ bilden.

Aus den Eigenschaften von $\mathfrak{G}_0$ folgt, daß $\mathrm{m}^\alpha\,\mathrm{s}^\beta = \mathrm{m}^{\alpha'}\,\mathrm{s}^{\beta'}$ dann und und nur dann gilt, wenn $(\alpha, \beta) = (\alpha', \beta')$, d. h. daß die Elemente von $\mathfrak{G}_0$ paarweise disjunkt sind. Insbesondere zieht also $\mathrm{m}^\alpha\,\mathrm{s}^\beta = \mathrm{m}^0\,\mathrm{s}^0$ nach sich $(\alpha, \beta) = (0, 0)$. Gäbe es nämlich ein Paar $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, so daß $\mathrm{m}^\alpha\,\mathrm{s}^\beta = \mathrm{m}^0\,\mathrm{s}^0$ wäre, dann wäre $\mathfrak{G}_0$ keine *freie* kommutative Gruppe vom Typus 2.

Es könnte zunächst den Anschein haben, als ob die Einheiten m und s in der eben erwähnten Menge $\mathfrak{G}_0$ nicht enthalten wären. An die Stelle der Einheit m tritt hier die Einheit $\mathrm{m}^1\,\mathrm{s}^0$ und an die Stelle der Einheit s die Einheit $\mathrm{m}^0\,\mathrm{s}^1$. Entsprechendes gilt für die Einheiten, die Potenzen von m allein bzw. Potenzen von s allein sind. Diese Einheiten sind diejenigen, die in der oben angegebenen Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}_0$ auf der gestrichelten Horizontalen bzw. Vertikalen eingezeichnet sind.

Zur Beschreibung geometrischer Eigenschaften reicht die kommutative Gruppe $\mathfrak{G}_0$ vom Typus 1 mit dem allgemeinen Element m^α, $\alpha \in Z$ aus. Sollen dagegen im Bereich der Kinematik geometrische Größen dargestellt werden, so hat man sich der Elemente $\mathrm{m}^\alpha\,\mathrm{s}^0$ $(\alpha \in Z)$ zu bedienen. Die Menge dieser Elemente bildet eine kommutative Gruppe vom Typus 1 mit der Basis $\mathrm{m}^1\,\mathrm{s}^0$. Diese Gruppe ist eine Untergruppe der für die Kinematik maßgebenden kommutativen Gruppe $\mathfrak{G}_0$ vom Typus 2 mit dem allgemeinen Element $\mathrm{m}^\alpha\,\mathrm{s}^\beta$, $(\alpha, \beta) \in Z^2$. Diese Untergruppe ist Bild eines Untermoduls Δ des Moduls Γ. Ist $\omega_1 = (1, 0) \in \Gamma$ das Bild von $\mathrm{m}^1\,\mathrm{s}^0 \in \mathfrak{G}_0$ und $\omega_2 = (0, 1) \in \Gamma$ das Bild von $\mathrm{m}^0\,\mathrm{s}^1 \in \mathfrak{G}_0$, dann ist das allgemeine Element von Γ gegeben durch $\alpha\,\omega_1 + \beta\,\omega_2$ mit $(\alpha, \beta) \in Z^2$. Das allgemeine Element des Untermoduls Δ ist $\alpha \cdot \omega_1 + 0 \cdot \omega_2$. Es ist demnach der Untermodul Δ die Menge

$$\Delta = \{\, \ldots, (-1, 0), (0, 0), (1, 0), \ldots \,\}.$$

Ferner sei noch bemerkt, daß die Einheiten der Winkelgeschwindigkeit $\mathrm{m}^0\,\mathrm{s}^{-1}$

und der Winkelbeschleunigung $\mathrm{m}^0\,\mathrm{s}^{-2}$ Elemente einer anderen Untergruppe von $\mathfrak{G}_0$ sind. Es ist dies die Untergruppe, deren allgemeines Element $\mathrm{m}^0\mathrm{s}^\beta$ mit $\beta \in Z$ ist. Zu ihr gehört der Untermodul

$$\Delta' = \{\ \ldots, (0, -1), (0, 0), (0, 1), \ldots\ \}.$$

Als Ergebnis der vorangehenden Betrachtungen sei festgehalten:
Die kommutative Untergruppe von endlichem Typus mit dem allgemeinen Element $\mathrm{m}^\alpha\,\mathrm{s}^0$ *hat eine Basis, die aus genau einem Element besteht, nämlich* $\mathrm{m}^1\,\mathrm{s}^0$.

Demnach findet *keine Erweiterung der Basis* von einem auf zwei Elemente statt, wenn m^1, also die Basis der kommutativen Gruppe vom Typus 1 mit dem allgemeinen Element m^α, $\alpha \in Z$, durch $\mathrm{m}^1\,\mathrm{s}^0$ ersetzt wird. Diese Untergruppe hat zwar *zwei Erzeugende*, nämlich $\mathrm{m}^1\,\mathrm{s}^0$ und $\mathrm{m}^0\,\mathrm{s}^1$, aber eine nur aus einem Element, nämlich $\mathrm{m}^1\,\mathrm{s}^0$ bestehende Basis.

Für das neutrale Element $\mathrm{m}^0\,\mathrm{s}^0$ der Gruppe $\mathfrak{G}_0$ vom Typus 2 gilt das gleiche wie für das neutrale Element der Gruppe $\mathfrak{G}_0$ vom Typus 1 (vgl. § 2, S. 20ff.), nämlich:

Jedes Element von $\mathfrak{G}_0$ *bleibt ungeändert, gleichgültig, ob es mit der Zahl 1 oder mit dem neutralen Element* $\mathrm{m}^0\,\mathrm{s}^0$ *multipliziert wird.*

Wird das Trennungsaxiom (vgl. § 2, S. 21) zugrunde gelegt, dann kann aus

$$(\mathrm{m}^0\,\mathrm{s}^0)\cdot(\mathrm{m}^\alpha\,\mathrm{s}^\beta) = 1\cdot(\mathrm{m}^\alpha\,\mathrm{s}^\beta)$$

nicht auf $\mathrm{m}^0\,\mathrm{s}^0 = 1$ geschlossen werden.

§ 5. Anwendung auf die Kinematik

In der Kinematik hat man es außer mit geometrischen Größen noch mit Größen wie Zeitdifferenz, Geschwindigkeit, Beschleunigung usw. zu tun. Es handelt sich im folgenden darum, die Ergebnisse des § 3 so zu verallgemeinern, daß der Kalkül auf die Kinematik angewendet werden kann. Da die in § 3 benutzten Begriffe und Methoden bei sinngemäßer Erweiterung übertragen werden können, seien im folgenden nur die wichtigsten Ergebnisse mitgeteilt. Unter $\mathfrak{G}_0$ werde die im vorhergehenden Paragraphen beschriebene freie kommutative Gruppe vom Typus 2 verstanden. Ist l das allgemeine Element des Vektorraumes der Längen, t das allgemeine Element des Vektorraumes der Zeitdifferenzen, dann ist die Menge $\mathfrak{S}$ durch

$$\mathfrak{S} = \{\ l^\mu\, t^\varrho \mid (\mu, \varrho) \in N^2\ \} \tag{5.1}$$

definiert. Für die Elemente von $\mathfrak{S}$ gelte die Multiplikationsvorschrift

$$(l^\mu\, t^\varrho)\,(l^\nu\, t^\sigma) = (l^{\mu+\nu}\, t^{\varrho+\sigma}), \qquad (\mu, \nu, \varrho, \sigma) \in N^4.$$

Mit dieser Verknüpfung bilden die Elemente von $\mathfrak{S}$ eine kommutative Semigruppe.

Mit $\mathfrak{S}$ ist auch die Menge $\mathfrak{S}^2$ definiert,

$$\mathfrak{S}^2 = \{\ (l^\mu\, t^\varrho,\ l^\nu\, t^\sigma) \mid (\mu, \nu, \varrho, \sigma) \in N^4\ \}.$$

Die Abbildung von $\mathfrak{S}^2$ in $\mathfrak{G}_0$ sei

$$f\,(l^\mu\, t^\varrho,\, l^\nu\, t^\sigma) = \mathrm{m}^{\mu-\nu}\, \mathrm{s}^{\varrho-\sigma}\,, \qquad (\mu,\, \nu,\, \varrho,\, \sigma) \in N^4,$$

kurz

$$f(\mathfrak{S}^2) = \mathfrak{G}_0.$$

Diese Abbildung ist ein *Homomorphismus.*

Zwei Elemente von $\mathfrak{S}^2$ werden äquivalent genannt, wenn sie in $\mathfrak{G}_0$ dasselbe Bild haben. Die Elemente $(l^\mu\, t^\varrho, l^\nu\, t^\sigma)$ und $(l^{\mu'}\, t^{\varrho'}, l^{\nu'}\, t^{\sigma'})$ sind genau dann äquivalent, wenn die Äquivalenzrelation

$$(R) \qquad (\mu - \nu,\, \varrho - \sigma) = (\mu' - \nu',\, \varrho' - \sigma')$$

erfüllt ist. Durch die Äquivalenzrelation (R) werden die Elemente von $\mathfrak{S}^2$ in Klassen eingeteilt; die Menge der Klassen, also die Quotientenmenge von $\mathfrak{S}^2$ in bezug auf (R), sei mit $\mathfrak{S}^2/R$ bezeichnet, ihr allgemeines Element mit $[l^\mu\, t^\varrho, l^\nu\, t^\sigma]$.

Die Elemente der Quotientenmenge $\mathfrak{S}^2/R$ bilden mit der multiplikativen Verknüpfung

$$[l^\mu\, t^\varrho,\, l^\nu\, t^\sigma] \cdot [l^{\mu'}\, t^{\varrho'},\, l^{\nu'}\, t^{\sigma'}] = [l^{\mu+\mu'}\, t^{\varrho+\varrho'},\, l^{\nu+\nu'}\, t^{\sigma+\sigma'}]$$

eine zu $\mathfrak{G}_0$ isomorphe Gruppe.

Das *neutrale* Element von $\mathfrak{S}^2/R$ ist die Klasse $[lt, lt]$, das zu der Klasse $[l^\mu\, t^\varrho,\, l^\nu\, t^\sigma]$ *inverse* Element ist die Klasse $[l^\nu\, t^\sigma,\, l^\mu\, t^\varrho]$.

Die soeben beschriebenen Zusammenhänge mögen wieder an einer Figur verdeutlicht werden. In der nachstehenden Figur sind veranschaulicht:

a) Elemente der Menge $\mathfrak{S}^2$ (durch Punkte dargestellt),

b) Elemente der Menge $\mathfrak{S}^2/R$ (gestrichelt umrandet),

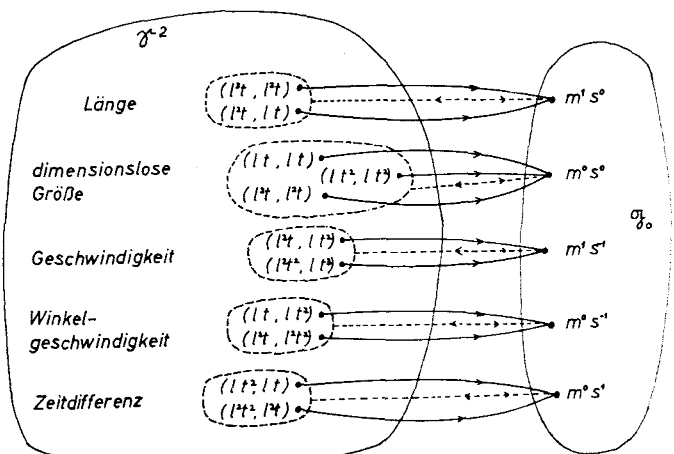

Abb. 4. Darstellung des Homomorphismus $f\,(\mathfrak{S}^2) = \mathfrak{G}_0$ und des Isomorphismus $f_1\,(\mathfrak{S}^2/R) = \mathfrak{G}_0$ ($\mathfrak{G}_0$ freie kommutative Gruppe vom Typus 2)

c) Elemente der freien kommutativen Gruppe $\mathfrak{G}_0$ vom Typus 2 (durch Punkte dargestellt),

d) der Homomorphismus $f(\mathfrak{S}^2) = \mathfrak{G}_0$ (durch mit Pfeilen versehene Linien dargestellt),

e) der Isomorphismus $f_1(\mathfrak{S}^2/R) = \mathfrak{G}_0$ (durch gestrichelte Linien mit Doppelpfeil dargestellt).

Für die so erhaltene Figur, die eine Verallgemeinerung der in § 3 dargestellten ist, gelten die sinngemäß erweiterten Aussagen des § 3 (vgl. S. 29ff.).

Als Ergebnis der vorangehenden Untersuchungen sei festgehalten:

Wird den Betrachtungen in der Kinematik die freie kommutative Gruppe $\mathfrak{G}_0$ *vom Typus 2 mit dem allgemeinen Element* $\mathrm{m}^\alpha\ \mathrm{s}^\beta$ $((\alpha, \beta) \in Z^2)$ *zugrunde gelegt, dann können als Einheiten nur Elemente von* $\mathfrak{G}_0$ *auftreten.*

In der Kinematik sind die *dimensionslosen Größen* durch

$$x = \xi\ \mathrm{m}^0\ \mathrm{s}^0$$

gekennzeichnet. Sie bilden ebenso wie die dimensionslosen Größen der Geometrie einen kommutativen Körper K, der isomorph zu dem Körper Ω ist. Ist $x = \xi\ \mathrm{m}^0\ \mathrm{s}^0 \in K$ und $h(x)$ eine beliebige Funktion von x, dann ist

$$h(x) = (h(\xi))\ \mathrm{m}^0\ \mathrm{s}^0,$$

d. h. daß $f(h) = f(x) = \mathrm{m}^0\ \mathrm{s}^0$, also h ebenfalls eine dimensionslose Größe ist. So gilt beispielsweise für den ebenen Winkel $y = \eta\ \mathrm{m}^0\ \mathrm{s}^0$

$$\sin y = \sin(\eta\ \mathrm{m}^0\ \mathrm{s}^0) = (\sin \eta)\ \mathrm{m}^0\ \mathrm{s}^0.$$

Es sei y das der Größe ebener Winkel zugeordnete Element, t das der Größe Zeit zugeordnete Element. Dann ist das der Größe *Winkelgeschwindigkeit* zugeordnete Element definiert als der Grenzwert eines Differenzenquotienten, in dessen Zähler die Differenz zweier y-Elemente und in dessen Nenner die Differenz zweier t-Elemente steht. Somit ist das der Winkelgeschwindigkeit zugeordnete Element — es sei mit w bezeichnet — mit den Elementen y und t durch

$$y = w \cdot t \tag{5.3}$$

verknüpft. Aus $l = l y$ folgt

$$l = w \cdot t \cdot l.$$

Ist $\mathfrak{G}_0$ die freie kommutative Gruppe vom Typus 2 mit dem allgemeinen Element $\mathrm{m}^\alpha\ \mathrm{s}^\beta$, $(\alpha, \beta) \in N^2$, dann folgt wegen

$$f(l) = \mathrm{m}^1\ \mathrm{s}^0 \quad \text{und} \quad f(t) = \mathrm{m}^0\ \mathrm{s}^1$$

$$f(w) = \mathrm{m}^0\ \mathrm{s}^{-1},$$

d. h., daß die Winkelgeschwindigkeit in der Einheit $\mathrm{m}^0\ \mathrm{s}^{-1}$ zu messen ist.

Wie oben dargelegt, ist in der Kinematik der ebene Winkel in $\mathrm{m}^0\ \mathrm{s}^0$ zu messen.

In der Praxis wird er oft in der Einheit $2\pi\ \mathrm{m}^0\ \mathrm{s}^0$ gemessen, also einer Einheit, die das 2π-fache der Einheit $\mathrm{m}^0\ \mathrm{s}^0$ ist. Diese Einheit wird *Periode*, auch *Umdrehung* genannt.

Dementsprechend kann die Winkelgeschwindigkeit auch in der Einheit $2\pi\,\mathrm{m}^0\,\mathrm{s}^{-1}$ gemessen werden, einer Einheit, der man den Namen „1 Hertz" gegeben hat. Diese Einheit kann als *Periode je Sekunde*, auch *Umdrehung je Sekunde* charakterisiert werden. Es ist Brauch, die Winkelgeschwindigkeit, wenn sie in der Einheit $\mathrm{m}^0\,\mathrm{s}^{-1}$ gemessen wird, *Kreisfrequenz* zu nennen, sie dagegen, wenn sie in der Einheit $2\pi\,\mathrm{m}^0\,\mathrm{s}^{-1}$ gemessen wird, *Frequenz* zu nennen. Aus dem Größenkalkül heraus läßt sich dieser Brauch nicht rechtfertigen, denn niemand wird daran denken, der „Geschwindigkeit" verschiedene Namen beizulegen, je nachdem, ob sie in Meilen/Stunde oder Meter/Sekunde gemessen wird.

§ 6. Erweiterung eines Einheitensystems

In der Physik ist es üblich, die Elemente einer Basis einer freien kommutativen Gruppe von endlichem Typus als „Basiseinheiten" zu bezeichnen. So bilden beispielsweise in der Kinematik die Einheiten m und s eine Basis.

Eine in diesem Zusammenhang oft diskutierte Frage ist die, ob die Längeneinheit m (Meter) und eine gewisse Winkeleinheit, etwa rad (Radiant), zusammen eine Basis bilden können. Um diese Frage zu untersuchen, sei vorbereitend daran erinnert, daß die freie kommutative Gruppe vom Typus 2, wie sie in § 4 beschrieben wurde, als allgemeines Element $\mathrm{m}^\alpha\,\mathrm{s}^\beta$, $(\alpha, \beta) \in Z^2$ hat, und daß $\mathrm{m}^1\,\mathrm{s}^0$ und $\mathrm{m}^0\,\mathrm{s}^1$ Erzeugende von $\mathfrak{G}_0$ sind, die eine Basis bilden. Infolgedessen sind die Elemente von $\mathfrak{G}_0$ paarweise disjunkt, d. h., daß $\mathrm{m}^\alpha\,\mathrm{s}^\beta = \mathrm{m}^{\alpha'}\,\mathrm{s}^{\beta'}$ dann und nur dann gilt, wenn $(\alpha, \beta) = (\alpha', \beta')$ ist.

Wird in der soeben erwähnten Gruppe $\mathfrak{G}_0$ das Element s durch das Element rad ersetzt, dann ergibt sich eine freie kommutative Gruppe vom Typus 2 mit dem allgemeinen Element $\mathrm{m}^\alpha\,\mathrm{rad}^\beta$, $(\alpha, \beta) \in Z^2$; sie hat die Erzeugenden $\mathrm{m}^1\,\mathrm{rad}^0$ und $\mathrm{m}^0\,\mathrm{rad}^1$, die eine Basis bilden. Diese Gruppe werde mit $\mathfrak{G}_0^*$ bezeichnet und den folgenden Betrachtungen zugrunde gelegt.

Des weiteren werden die folgenden Annahmen gemacht:

a) das der Größe „ebener Winkel" zugeordnete Element u sei Element des eindimensionalen Vektorraumes, der die Basis $u_0 = \mathrm{m}^0\,\mathrm{rad}^1$ hat,

b) das Element u genüge der Beziehung

$$l = l \cdot u.$$

Aus $l = l \cdot u$ folgt, daß die in $\mathfrak{G}_0^*$ gelegenen Bilder von l und u der Beziehung

$$f(l) = f(l) \cdot f(u)$$

genügen. Mit

$$f(l) = \mathrm{m}^1\,\mathrm{rad}^0,\; f(u) = \mathrm{m}^0\,\mathrm{rad}^1$$

ergibt sich aus dieser Beziehung

$$\mathrm{m}^1\,\mathrm{rad}^0 = \mathrm{m}^1\,\mathrm{rad}^1.$$

Hier ist $\mathrm{m}^\alpha\,\mathrm{rad}^\beta = \mathrm{m}^{\alpha'}\,\mathrm{rad}^{\beta'}$, ohne daß $(\alpha, \beta) = (\alpha', \beta')$ ist. Dies steht in Widerspruch zu der Voraussetzung, daß $\mathfrak{G}_0^*$ eine freie kommutative Gruppe vom Typus 2 ist. Damit ist gezeigt, daß es kein der Annahme a) genügendes Element u gibt, welches die Beziehung $l = l \cdot u$ erfüllt.

Soll an der Annahme a) festgehalten werden, so bleibt nur übrig, die Annahme b) durch eine mit a) verträgliche zu ersetzen. Eine solche Annahme ist die folgende:

b') das Element u genüge der Beziehung

$$u = u_0 \cdot y \tag{6.1}$$

wobei $y \in K$ das auf Grund der in § 3 gemachten Annahmen der Größe „ebener Winkel" zugeordnete, der Beziehung $l = l \cdot y$ genügende Element ist.

Durch die Annahme b') wird erreicht, daß das nunmehr der Größe „ebener Winkel" zugeordnete Element u in der Einheit $\mathrm{m}^0\,\mathrm{rad}^1$ gemessen werden kann, und gleichzeitig die Längeneinheit $\mathrm{m}^1\,\mathrm{rad}^0$ (Meter) und die Winkeleinheit $\mathrm{m}^0\,\mathrm{rad}^1$ (Radiant) zusammen eine Basis der freien kommutativen Gruppe $\mathfrak{G}_0^*$ bilden.

Nachstehend einige Eigenschaften des soeben eingeführten Elementes u:

1. Aus (6.1) folgt $y = u/u_0$.

   Die für y gültige Beziehung

   $$l = r \cdot y, \ (l \text{ Bogenlänge, } r \text{ Radius})$$

   geht bei Einführung von u über in

   $$l = r \cdot u/u_0$$

2. Während für das Element y wegen $y \in K$ der Sinus gebildet werden kann,

   $$\sin y = \sin\,(u/u_0)$$

   ist dies wegen $u \notin K$ für das Element u nicht möglich. Es existiert lediglich der Sinus eines „Quotienten zweier Winkel". Entsprechendes gilt für die übrigen trigonometrischen Funktionen.

3. Es sei

   $$\mathfrak{S} = \{\, l^\mu\, u^\varrho \mid (\mu, \varrho) \in N^2 \,\}$$

   die Semigruppe, die aus der in (5.1) angeschriebenen dadurch entsteht, daß t durch u ersetzt wird, $\mathfrak{G}_0^*$ sei die soeben eingeführte freie kommutative Gruppe vom Typus 2 mit der Basis $\mathrm{m}^1\,\mathrm{rad}^0$, $\mathrm{m}^0\,\mathrm{rad}^1$. Dann ist die Abbildung $f(\mathfrak{S}^2) = \mathfrak{G}_0^*$ ein *Homomorphismus*, aber kein *Isomorphismus*. Dieser Homomorphismus ist in Abb. 5 veranschaulicht (vgl. hierzu die der Abb. 5 entsprechende Abb. 4).

Wie Abb. 5 zu entnehmen ist, hat das Element y als Quotient Bogenlänge/Radius wie jeder Quotient vom Typus l/l in $\mathfrak{G}_0^*$ das Bild $\mathrm{m}^0\,\mathrm{rad}^0$, dagegen hat das Element u in $\mathfrak{G}_0^*$ das Bild $\mathrm{m}^0\,\mathrm{rad}^1$. Wenn durch die Annahmen a) und b') auch bewirkt wird, daß y und u verschiedene Bilder in $\mathfrak{G}_0^*$ haben, so wird dennoch kein *Isomorphismus* erreicht, es wird lediglich der ursprüngliche Homomorphismus modifiziert. So haben beispielsweise die Quotienten l/l und u/u dasselbe Bild, nämlich $\mathrm{m}^0\,\mathrm{rad}^0$.

Geht man noch einen Schritt weiter, indem man den Betrachtungen eine freie kommutative Gruppe $\mathfrak{G}_0$ *vom Typus 3* mit der Bais $\mathrm{m}^1\,\mathrm{rad}^0\,\mathrm{sr}^0$, $\mathrm{m}^0\,\mathrm{rad}^1\,\mathrm{sr}^0$, $\mathrm{m}^0\,\mathrm{rad}^0\,\mathrm{sr}^1$ zugrunde legt, und gleichzeitig ein der Größe „räumlicher Winkel"

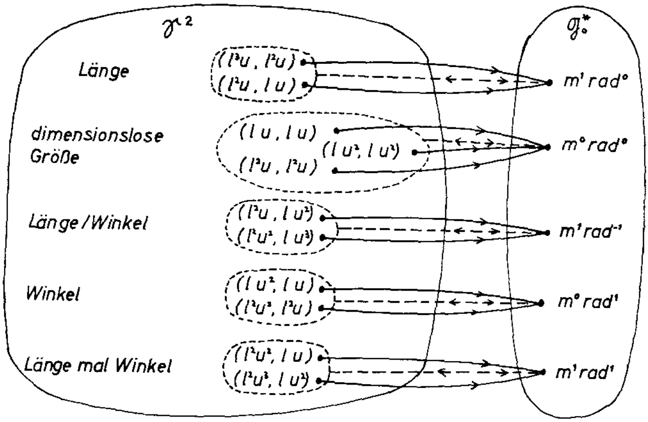

Abb. 5. Darstellung des Homomorphismus $f(\mathfrak{S}^2) = \mathfrak{G}_0{}^*$ und des Isomorphismus $f_1(\mathfrak{S}^2, R) = \mathfrak{G}_0{}^*$

zugeordnetes Element v einführt, das Element eines eindimensionalen Vektorraumes mit der Basis $v_0 = \mathrm{m}^0\,\mathrm{rad}^0\,\mathrm{sr}^1$ ist, dann wird zwar erreicht, daß die Elemente l/l, u und v verschiedene Bilder in der erwähnten Gruppe $\mathfrak{G}_0$ vom Typus 3 haben,

$$f(l/l) = \mathrm{m}^0\,\mathrm{rad}^0\,\mathrm{sr}^0,\; f(u) = \mathrm{m}^0\,\mathrm{rad}^1\,\mathrm{sr}^0,\; f(v) = \mathrm{m}^0\,\mathrm{rad}^0\,\mathrm{sr}^1,$$

aber die Abbildung $f(\mathfrak{S}^2) = \mathfrak{G}_0$ ist kein Isomorphismus, denn es haben beispielsweise die Quotienten l/l, u/u, v/v dasselbe Bild in $\mathfrak{G}_0$, nämlich $\mathrm{m}^0\,\mathrm{rad}^0\,\mathrm{sr}^0$. Ginge man schließlich so weit, den Größenkalkül auf die Mechanik anzuwenden, von welcher ja die Geometrie ein Teilgebiet ist, so hätte man eine freie kommutative Gruppe $\mathfrak{G}_0$ *vom Typus 5* zugrunde zu legen, deren Basis durch die fünf Elemente

$$\mathrm{m}^1\,\mathrm{rad}^0\,\mathrm{sr}^0\,\mathrm{kg}^0\,\mathrm{s}^0,\;\ldots,\;\mathrm{m}^0\,\mathrm{rad}^0\,\mathrm{sr}^0\,\mathrm{kg}^0\,\mathrm{s}^1$$

gegeben ist. Tut man dies, so wird erreicht, daß die den Größen „Energie" und „Drehmoment" zugeordneten Elemente verschiedene Bilder in der Gruppe $\mathfrak{G}_0$ vom Typus 5 haben. Die Energie ist in der Einheit $\mathrm{m}^2\,\mathrm{rad}^0\,\mathrm{sr}^0\,\mathrm{kg}^1\,\mathrm{s}^{-2}$ zu messen, das Drehmoment in der Einheit $\mathrm{m}^2\,\mathrm{rad}^{-1}\,\mathrm{sr}^0\,\mathrm{kg}^1\,\mathrm{s}^{-2}$.

Wie die vorstehenden Untersuchungen zeigen, ist es möglich, Einheiten wie rad und sr als Grundeinheiten einzuführen. Zwar wird dadurch erreicht, daß gewisse verschiedene Elemente von $\mathfrak{S}^2$ auch verschiedene Bilder haben, aber der Homomorphismus $f(\mathfrak{S}^2) = \mathfrak{G}_0$ wird dadurch *kein Isomorphismus*, er wird nur modifiziert. Eine geringfügige Modifikation des Homomorphismus wird durch einen formalen Mehraufwand (Verwendung einer freien kommutativen Gruppe vom Typus ϱ mit großem ϱ) erkauft, ohne daß das Ziel, ein Isomorphismus, erreicht wird. Daher kann zumindest in der Geometrie die Einführung von rad und sr als Basiseinheiten nicht empfohlen werden.

Will man, aus welchen Gründen auch immer, derartig erweiterte Einheitensysteme benutzen, dann ist abzuwägen, ob der dabei erzielte Vorteil, der in einem geringfügigen Mehr an Information besteht, den mit der Erweiterung verbundenen Mehraufwand rechtfertigt. Oft wird es vorteilhafter sein, sich zu bescheiden und von der Existenz des nun einmal vorhandenen Homomorphismus Kenntnis zu nehmen und ihm Rechnung zu tragen.

§ 7. Anwendung auf das MKSA-System

Bei der Anwendung des Größenkalküls auf den Bereich der Mechanik-Elektrodynamik ist es üblich, den Betrachtungen die Einheiten des sogenannten MKSA-Systems zugrunde zu legen. In dem genannten Bereich der Physik hat man es mit Längen, Massen, Zeitdifferenzen, Stromstärken und anderen aus diesen Größen abgeleiteten Größen zu tun. Zu diesen Größen gehören die folgenden Einheiten:

Länge .... m (Meter)
Masse............ kg (Kilogramm)
Zeitdifferenz...... s (Sekunde)
Stromstärke ...... A (Ampère).

In Verallgemeinerung des in § 4 beschriebenen Vorganges wird bei dem MKSA-System den Betrachtungen eine freie kommutative Gruppe $\mathfrak{G}_0$ vom Typus 4 zugrunde gelegt. Das allgemeine Element dieser Gruppe ist

$$\mathrm{m}^\alpha\,\mathrm{kg}^\beta\,\mathrm{s}^\gamma\,\mathrm{A}^\delta, \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in Z^4.$$

Eine Basis dieser Gruppe ist

$$\mathrm{m}^1\,\mathrm{kg}^0\,\mathrm{s}^0\,\mathrm{A}^0,\ \ \mathrm{m}^0\,\mathrm{kg}^1\,\mathrm{s}^0\,\mathrm{A}^0,\ \ \mathrm{m}^0\,\mathrm{kg}^0\,\mathrm{s}^1\,\mathrm{A}^0,\ \ \mathrm{m}^0\,\mathrm{kg}^0\,\mathrm{s}^0\,\mathrm{A}^1,$$

ihr neutrales Element ist $\mathrm{m}^0\,\mathrm{kg}^0\,\mathrm{s}^0\,\mathrm{A}^0$. Ferner sei daran erinnert, daß die beiden Elemente

$$\mathrm{m}^\alpha\,\mathrm{kg}^\beta\,\mathrm{s}^\gamma\,\mathrm{A}^\delta \ \text{ und } \ \mathrm{m}^{\alpha'}\,\mathrm{kg}^{\beta'}\,\mathrm{s}^{\gamma'}\,\mathrm{A}^{\delta'}$$

dann und nur dann gleich sind, wenn

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\alpha', \beta', \gamma', \delta').$$

Von einer näheren Beschreibung der hierher gehörenden kommutativen Semigruppe $\mathfrak{S}$ sei abgesehen: es möge der Hinweis genügen, daß es sich um eine Verallgemeinerung der in § 5 beschriebenen Semigruppe handelt. Ebenso wie dort wird $\mathfrak{S}^2$ gebildet und die durch $f(\mathfrak{S}^2) = \mathfrak{G}_0$ gegebene Abbildung eingeführt, die ein Homomorphismus ist. Durch diese Abbildung wird jedem Element von $\mathfrak{S}^2$ genau ein Element von $\mathfrak{G}_0$ zugeordnet; die Abbildung $f(\mathfrak{S}^2) = \mathfrak{G}_0$ ist surjektiv.

Elemente von $\mathfrak{S}^2$, die in $\mathfrak{G}_0$ dasselbe Bild haben, werden äquivalent genannt. Dies führt auf eine Äquivalenzrelation (R) und damit auf die Quotientenmenge $\mathfrak{S}^2/R$, das ist die Menge der Klassen, in welche die Elemente von $\mathfrak{S}^2$ durch (R) eingeteilt werden.

Die Elemente der Quotientenmenge $\mathfrak{S}^2/R$ bilden eine zu $\mathfrak{G}_0$ isomorphe Gruppe. Die vorstehend beschriebenen Zusammenhänge mögen durch die Abb. 6 verdeutlicht werden. Dabei sind die Elemente von $\mathfrak{S}^2$ bzw. $\mathfrak{S}^2/R$ durch entsprechende in der Physik gebräuchliche Namen charakterisiert. In der folgenden Figur sind veranschaulicht:

a) Elemente der Menge $\mathfrak{S}^2$ (durch Punkte dargestellt),
b) Elemente der Menge $\mathfrak{S}^2/R$ (gestrichelt umrandet),
c) Elemente der freien kommutativen Gruppe $\mathfrak{G}_0$ vom Typus 4 (durch Punkte dargestellt),
d) der Homomorphismus $f(\mathfrak{S}^2) = \mathfrak{G}_0$ (durch mit Pfeilen versehene Linien dargestellt),
e) der Isomorphismus $f_1(\mathfrak{S}^2/R) = \mathfrak{G}_0$ (durch gestrichelte Linien mit Doppelpfeil dargestellt).

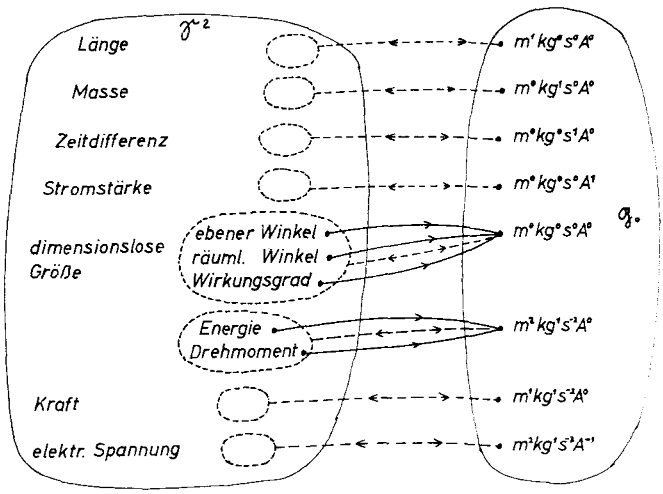

Abb. 6. Darstellung des Homomorphismus $f(\mathfrak{S}^2) = \mathfrak{G}_0$ und des Isomorphismus $f_1(\mathfrak{S}^2/R) = \mathfrak{G}_0$ ($\mathfrak{G}_0$ freie kommutative Gruppe vom Typus 4)

Wie die Figur zeigt, ist die Abbildung f nicht bijektiv. So haben beispielsweise die den Größen „ebener Winkel", „räumlicher Winkel" und „Wirkungsgrad" zugeordneten Elemente dasselbe Bild in $\mathfrak{G}_0$, nämlich $m^0\,kg^0\,s^0\,A^0$. Auch die den Größen Energie und Drehmoment zugeordneten Elemente haben dasselbe Bild in $\mathfrak{G}_0$, nämlich $m^2\,kg^1\,s^{-2}\,A^0$. Das letzte Beispiel ist wohl das bekannteste dafür, daß zwei ihrer Natur nach verschiedene physikalische Größen in ein und derselben Einheit gemessen werden.

Zwischen Drehmoment und Energie besteht die Beziehung

Energie = Drehmoment mal Winkel.

Dieser Beziehung entspricht in $\mathfrak{G}_0$ die Gleichung

$$m^2\,kg^1\,s^{-2}\,A^0 = (m^2\,kg^1\,s^{-2}\,A^0)\,(m^0\,kg^0\,s^0\,A^0).$$

Im übrigen sei auf die Darlegungen des § 6 verwiesen, wo gezeigt wurde, wie sich durch Erweiterung des Einheitensystems erreichen läßt, daß zu Drehmoment und Energie verschiedene Einheiten gehören.

Zur Beschreibung der Erscheinungen der Mechanik reicht die kommutative Gruppe vom Typus 3 mit dem allgemeinen Element $\mathrm{m}^{\alpha}\,\mathrm{kg}^{\beta}\,\mathrm{s}^{\gamma}$, $(\alpha, \beta, \gamma) \in Z^3$ aus. Sollen dagegen Größen der Mechanik in dem Gesamtbereich Mechanik-Elektrodynamik dargestellt werden, so hat man sich der Elemente $\mathrm{m}^{\alpha}\,\mathrm{kg}^{\beta}\,\mathrm{s}^{\gamma}\,\mathrm{A}^0$, $(\alpha, \beta, \gamma) \in Z^3$ zu bedienen. Die Menge dieser Elemente bildet eine kommutative freie Gruppe vom Typus 3 mit der Basis $\mathrm{m}^1\,\mathrm{kg}^0\,\mathrm{s}^0\,\mathrm{A}^0$, $\mathrm{m}^0\,\mathrm{kg}^1\,\mathrm{s}^0\,\mathrm{A}^0$, $\mathrm{m}^0\,\mathrm{kg}^0\,\mathrm{s}^1\,\mathrm{A}^0$. Diese Gruppe ist eine Untergruppe der für den Gesamtbereich Mechanik-Elektrodynamik maßgebenden Gruppe $\mathfrak{G}_0$ vom Typus 4 mit dem allgemeinen Element $\mathrm{m}^{\alpha}\,\mathrm{kg}^{\beta}\,\mathrm{s}^{\gamma}\,\mathrm{A}^{\delta}$, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in Z^4$.

Im MKSA-System ist das allgemeine Element des Körpers K der dimensionslosen Größen durch

$$x = \xi\,\mathrm{m}^0\,\mathrm{kg}^0\,\mathrm{s}^0\,\mathrm{A}^0$$

gegeben. Danach ist in diesem System das der Größe „ebener Winkel" zugeordnete Element y durch

$$y = \eta\,\mathrm{m}^0\,\mathrm{kg}^0\,\mathrm{s}^0\,\mathrm{A}^0, \qquad \eta \in \Omega \tag{7.1}$$

darzustellen, ebenso ein räumlicher Winkel oder ein Wirkungsgrad (Quotient zweier Leistungen).

Ist $h(x)$ irgendeine Funktion von $x \in K$, dann gilt im MKSA-System

$$h(x) = h\,(\xi\,\mathrm{m}^0\,\mathrm{kg}^0\,\mathrm{s}^0\,\mathrm{A}^0) = (h(\xi))\,\mathrm{m}^0\,\mathrm{kg}^0\,\mathrm{s}^0\,\mathrm{A}^0.$$

Man vergleiche hierzu die Ausführungen in den §§ 3 und 5.

Es ist beispielsweise, wenn das der Größe ebener Winkel zugeordnete Element durch (7.1) gegeben ist,

$$\sin y = \sin\,(\eta\,\mathrm{m}^0\,\mathrm{kg}^0\,\mathrm{s}^0\,\mathrm{A}^0) = (\sin \eta)\,\mathrm{m}^0\,\mathrm{kg}^0\,\mathrm{s}^0\,\mathrm{A}^0.$$

Ein weiteres Beispiel für Funktionen von Elementen des Körpers K bietet sich in den sogenannten *logarithmischen Maßen* an. Wird den Betrachtungen das MKSA-System zugrunde gelegt und sind

$$x_1 = \xi_1\,\mathrm{m}^{\alpha}\,\mathrm{kg}^{\beta}\,\mathrm{s}^{\gamma}\,\mathrm{A}^{\delta}, \; x_2 = \xi_2\,\mathrm{m}^{\alpha}\,\mathrm{kg}^{\beta}\,\mathrm{s}^{\gamma}\,\mathrm{A}^{\delta}$$

zwei Elemente, die in ein- und derselben Einheit gemessen werden, dann ist

$$x_1/x_2 = (\xi_1/\xi_2)\,\mathrm{m}^0\,\mathrm{kg}^0\,\mathrm{s}^0\,\mathrm{A}^0 \in K,$$

also eine dimensionslose Größe. Wird von dieser dimensionslosen Größe der Logarithmus zur Basis β genommen, dann ergibt sich

$$\log_\beta\,(x_1/x_2) = (\log_\beta\,(\xi_1/\xi_2))\,\mathrm{m}^0\,\mathrm{kg}^0\,\mathrm{s}^0\,\mathrm{A}^0\,.$$

Ist x_1/x_2 der *Quotient zweier elektrischer Spannungen* und wird der *natürliche Logarithmus* benutzt ($\beta = e$), dann ist

$$\ln\,(x_1/x_2) = (\ln\,(\xi_1/\xi_2))\,\mathrm{m}^0\,\mathrm{kg}^0\,\mathrm{s}^0\,\mathrm{A}^0. \tag{7.2}$$

Ist x_1/x_2 der *Quotient zweier Leistungen* und wird der *Briggssche Logarithmus* benutzt ($\beta = 10$), dann ist

$$\lg (x_1/x_2) = (\lg (\xi_1/\xi_2))\ \mathrm{m}^0\ \mathrm{kg}^0\ \mathrm{s}^0\ \mathrm{A}^0. \tag{7.3}$$

Diese dimensionslosen Größen werden *logarithmische Dämpfungsmaße* genannt. In der einschlägigen Literatur ist die folgende Ausdrucksweise gebräuchlich. Die durch (7.2) definierte dimensionslose Größe wird das in der Einheit „Neper“ gemessene Dämpfungsmaß genannt, die durch (7.3) definierte dimensionslose Größe das in der Einheit „Bel“ gemessene Dämpfungsmaß. Diese Ausdrucksweise paßt nicht in den Größenkalkül, denn Einheiten wie „Neper“ und „Bel“ sind nicht Elemente der freien kommutativen Gruppe vom Typus 4 mit dem allgemeinen Element $\mathrm{m}^\alpha\ \mathrm{kg}^\beta\ \mathrm{s}^\gamma\ \mathrm{A}^\delta$; $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in Z^4$, also keine Einheiten des MKSA-Systems.

Korrekt im Sinne des Größenkalküls ist die folgende Ausdrucksweise:

$$a_\mathrm{N} = (\ln (\xi_1/\xi_2))\ \mathrm{m}^0\ \mathrm{kg}^0\ \mathrm{s}^0\ \mathrm{A}^0, \tag{7.4}$$

wobei a_N das „Neper-Dämpfungsmaß“ ist,

$$a_\mathrm{B} = (\lg (\xi_1/\xi_2))\ \mathrm{m}^0\ \mathrm{kg}^0\ \mathrm{s}^0\ \mathrm{A}^0, \tag{7.5}$$

wobei a_B das „Bel-Dämpfungsmaß“ ist. Beide Dämpfungsmaße werden in der Einheit $\mathrm{m}^0\ \mathrm{kg}^0\ \mathrm{s}^0\ \mathrm{A}^0$ gemessen.

Ein weiteres hierher gehörendes Beispiel ist das folgende. Es sei

$$z = \zeta\ \mathrm{m}^0\ \mathrm{kg}^0\ \mathrm{s}^0\ \mathrm{A}^0,$$

also $z \in K$, wobei ζ Element des Körpers Ω der *komplexen* Zahlen ist,

$$\zeta = |\zeta|\ \mathrm{e}^{i \operatorname{arc} \zeta}. \tag{7.6}$$

Dann ist

$$\ln z = (\ln \zeta)\ \mathrm{m}^0\ \mathrm{kg}^0\ \mathrm{s}^0\ \mathrm{A}^0.$$

Aus (7.6) folgt

$$\ln \zeta = \ln |\zeta| + i \operatorname{arc} \zeta$$

(beachte, daß $\ln |\zeta|$ und $\operatorname{arc} \zeta$ reelle Zahlen sind) und damit

$$\ln z = (\ln |\zeta|)\ \mathrm{m}^0\ \mathrm{kg}^0\ \mathrm{s}^0\ \mathrm{A}^0 + i\ (\operatorname{arc} \zeta)\ \mathrm{m}^0\ \mathrm{kg}^0\ \mathrm{s}^0\ \mathrm{A}^0.$$

Die Größe $a = \ln z$ wird „komplexes Dämpfungsmaß“ genannt, sowohl der Real- als auch der Imaginärteil von a wird in $\mathrm{m}^0\ \mathrm{kg}^0\ \mathrm{s}^0\ \mathrm{A}^0$ gemessen.

Die soeben gewonnenen Ergebnisse können auf dem folgenden elementaren Weg bestätigt werden. Es wird die Differentialgleichung der freien gedämpften Schwingungen betrachtet,

$$a\,\ddot{x} + b\,\dot{x} + c\,x = 0. \tag{7.7}$$

x bedeutet das der Auslenkung zugeordnete Element, a das der Masse, b das der Dämpfungskonstanten, c das der Federkonstanten. Die auf der linken Seite stehenden Summanden sind sämtlich Elemente des Vektorraumes der

Kräfte. Es gilt also, wenn den Betrachtungen das Meter-Kilogramm-Sekunde-System zugrunde gelegt wird

$$f(a\ddot{x}) = f(b\dot{x}) = f(cx) = \mathrm{m}^1\,\mathrm{kg}^1\,\mathrm{s}^{-2}.$$

Daraus folgt

$$f(b) = \mathrm{m}^0\,\mathrm{kg}^1\,\mathrm{s}^{-1}, \quad f(c) = \mathrm{m}^0\,\mathrm{kg}^1\,\mathrm{s}^{-2}.$$

Die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung (7.7) lautet

$$a\,h^2 + b\,h + c = 0. \tag{7.8}$$

Die links stehenden Summanden sind sämtlich Elemente des Vektorraumes, dem c angehört. Daraus folgt

$$f(h) = \mathrm{m}^0\,\mathrm{kg}^0\,\mathrm{s}^{-1}, \; f(ht) = \mathrm{m}^0\,\mathrm{kg}^0\,\mathrm{s}^0.$$

Die Gesamtheit der Lösungen der Differentialgleichung (7.7) ist

$$x = x_1\,\mathrm{e}^{h_1 t} + x_2\,\mathrm{e}^{h_2 t}.$$

Hierin sind h_1 und h_2 die Wurzeln der Gleichung (7.8), ferner x_1 und x_2 Elemente des Vektorraumes der Längen. Das Dämpfungsmaß wird in der Einheit gemessen, die das Produkt ht hat, also in $\mathrm{m}^0\,\mathrm{kg}^0\,\mathrm{s}^0$.

Abschließend sei nochmals betont, daß Np (Neper) keine Einheit des MKSA-Systems ist. Die Einführung von Np als Grundeinheit durch Benutzung eines erweiterten Systems (MKSANp-System) kann gemäß dem im § 6 für den ebenen Winkel beschriebenen Vorgang erfolgen. Aus den dort dargelegten Gründen kann eine solche Erweiterung nicht empfohlen werden.

§ 8. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ der verallgemeinerten V-Elemente als direktes Produkt von Gruppen

In den vorangehenden Paragraphen wurden freie kommutative Gruppen von endlichem Typus betrachtet und deren Bedeutung für den Größenkalkül dargelegt. In § 6 der Arbeit [1] wurde gezeigt, wie man von der Gruppe $\mathfrak{G}$ der verallgemeinerten V-Elemente zu der Gruppe $\mathfrak{G}_0$ gelangt, die eine zu $\mathfrak{G}$ homomorphe Untergruppe von $\mathfrak{G}$ ist. Man kann auch umgekehrt von $\mathfrak{G}_0$ zu $\mathfrak{G}$ gelangen. Hierüber findet sich in § 7 der genannten Arbeit im vorletzten Absatz der Seite 44 eine Bemerkung, nach welcher eine zu $\mathfrak{G}$ isomorphe Gruppe unter Benutzung des Begriffes des Produktes zweier Gruppen gewonnen werden kann. Diesen Weg hat *R. Fleischmann* in der Arbeit [9] beschritten (wegen der mathematischen Theorie sei auf [10] verwiesen).

Um den soeben erwähnten umgekehrten Vorgang zu beschreiben, werden die beiden nachstehend aufgeführten Gruppen betrachtet:

1. Die Menge Ω' der von Null verschiedenen reellen (komplexen) Zahlen mit der Multiplikation als Verknüpfung. Die Elemente von Ω' bilden eine kommutative Gruppe, deren Einselement die Zahl 1 ist, das zu $\xi \in \Omega'$ inverse Element ist $1/\xi \in \Omega'$.
2. Die in § 2 eingeführte freie kommutative Gruppe $\mathfrak{G}_0$ vom Typus 1, deren allgemeines Element m^α $(\alpha \in Z)$ ist.

Das kartesische Produkt der beiden Mengen Ω' und $\mathfrak{G}_0$ ist die Menge

$$\Omega' \times \mathfrak{G}_0 = \{ (\xi, \mathrm{m}^\alpha) \mid \xi \in \Omega', \alpha \in Z \}.$$

Die Elemente der Menge $\Omega' \times \mathfrak{G}_0$ seien durch die folgende Multiplikationsvorschrift verknüpft:

$$(\xi, \mathrm{m}^\alpha) \odot (\xi', \mathrm{m}^{\alpha'}) = (\xi\, \xi', \mathrm{m}^{\alpha+\alpha'}), \qquad (\xi, \xi') \in \Omega'^2, (\alpha, \alpha') \in Z^2.$$

Mit dieser Verknüpfung bilden die Elemente von $\Omega' \times \mathfrak{G}_0$ eine kommutative Gruppe, die letztere wird das *direkte Produkt* der beiden Gruppen Ω' und $\mathfrak{G}_0$ genannt. Es ist leicht zu bestätigen, daß die für eine kommutative Gruppe maßgebenden Axiome erfüllt sind. Das neutrale Element von $\Omega' \times \mathfrak{G}_0$ ist $(1, m^0)$, das zu dem allgemeinen Element (ξ, m^α) inverse Element ist $(1/\xi, \mathrm{m}^{-\alpha})$.

Der soeben eingeführte Begriff des direkten Produktes zweier Gruppen kann unmittelbar auf Produkte mit mehr als zwei Faktoren erweitert werden. Es möge hier genügen, ein Produkt von drei Faktoren zu betrachten. Es sei Ω' die soeben erwähnte Menge der von Null verschiedenen reellen (komplexen) Zahlen, $\mathfrak{G}_0(\mathrm{m})$ die kommutative freie Gruppe vom Typus 1 mit dem allgemeinen Element m^α $(\alpha \in Z)$, $\mathfrak{G}_0(\mathrm{s})$ die kommutative freie Gruppe vom Typus 1 mit dem allgemeinen Element s^β $(\beta \in Z)$. Ist $\Omega' \times \mathfrak{G}_0(\mathrm{m}) \times \mathfrak{G}_0(\mathrm{s})$ das kartesische Produkt dieser drei Mengen, dann bilden die Elemente der Produktmenge mit der multiplikativen Verknüpfung

$$(\xi, \mathrm{m}^\alpha, \mathrm{s}^\beta) \odot (\xi', \mathrm{m}^{\alpha'}, \mathrm{s}^{\beta'}) = (\xi\, \xi', \mathrm{m}^{\alpha+\alpha'}, \mathrm{s}^{\beta+\beta'})$$

eine kommutative Gruppe, die mit $\mathfrak{G}$ bezeichnet werden möge.

$\mathfrak{G}$ wird das *direkte Produkt* der drei Gruppen Ω', $\mathfrak{G}_0(\mathrm{m})$, $\mathfrak{G}_0(\mathrm{s})$ genannt. Das neutrale Element von $\mathfrak{G}$ ist $(1, \mathrm{m}^0, \mathrm{s}^0)$, das zu $(\xi, \mathrm{m}^\alpha, \mathrm{s}^\beta)$ inverse Element ist $(1/\xi, \mathrm{m}^{-\alpha}, \mathrm{s}^{-\beta})$.

Es sei $x = (\xi, \mathrm{m}^\alpha, \mathrm{s}^\beta)$ das allgemeine Element des direkten Produktes $\mathfrak{G}$. Als erste, zweite und dritte *Komposante des allgemeinen Elementes* x werden die folgenden drei Elemente bezeichnet:

$$x_1 = (\xi, \mathrm{m}^0, \mathrm{s}^0), \;\; x_2 = (1, \mathrm{m}^\alpha, \mathrm{s}^0), \;\; x_3 = (1, \mathrm{m}^0, \mathrm{s}^\beta).$$

Die ν-te Komposante entsteht demnach dadurch aus dem allgemeinen Element x, daß das ν-te Element des Tripels x festgehalten wird und die übrigen Elemente durch die entsprechenden neutralen Elemente ersetzt werden.

Jedes Element von $\mathfrak{G}$ kann als Produkt seiner Komposanten dargestellt werden (mit der auf $\mathfrak{G}$ erklärten multiplikativen Verknüpfung).

In der Tat, es ist

$$x = x_1 \odot x_2 \odot x_3 = (\xi, \mathrm{m}^\alpha, \mathrm{s}^\beta). \tag{8.1}$$

Jede Komposante des allgemeinen Elements $x \in \mathfrak{G}$ ist offensichtlich Element von $\mathfrak{G}$. Die Menge der ersten Komposanten x_1, also die Menge $\{ (\xi, \mathrm{m}^0, \mathrm{s}^0) \mid \xi \in \Omega' \}$ werde mit $\mathfrak{G}_1$ bezeichnet, allgemein: die Menge der ν-ten Komposanten mit $\mathfrak{G}_\nu$.

Die Elemente einer jeden Menge $\mathfrak{G}_\nu$ bilden eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{G}_1$ ist isomorph zu Ω', $\mathfrak{G}_2$ isomorph zu $\mathfrak{G}_0(\mathrm{m})$, $\mathfrak{G}_3$ isomorph zu $\mathfrak{G}_0(\mathrm{s})$.

Der Nachweis der Gruppeneigenschaften und der Isomorphie sei unterdrückt, da er in der üblichen Weise erfolgen kann.

Die Untergruppe $\mathfrak{G}_\nu$ wird die *ν-te Komposante der Gruppe* $\mathfrak{G}$ genannt (nicht zu verwechseln mit der ν-ten Komposante des allgemeinen Elements $x \in \mathfrak{G}$). Nachstehend noch zwei Bemerkungen zu den vorangehenden Ausführungen:

a) Die Darstellung (8.1) kann kurz in der Symbolik

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \odot \mathfrak{G}_2 \odot \mathfrak{G}_3$$

geschrieben werden.

b) Das allgemeine Element $\mathrm{m}^\alpha\, \mathrm{s}^\beta$ der freien kommutativen Gruppe $\mathfrak{G}_0$ vom Typus 2 kann als direktes Produkt seiner Komposanten $(\mathrm{m}^\alpha, \mathrm{s}^0)$ und $(\mathrm{m}^0, \mathrm{s}^\beta)$ dargestellt werden,

$$(\mathrm{m}^\alpha, \mathrm{s}^\beta) = (\mathrm{m}^\alpha, \mathrm{s}^0) \odot (\mathrm{m}^0, \mathrm{s}^\beta).$$

Entsprechend a) kann die freie kommutative Gruppe $\mathfrak{G}_0$ vom Typus 2 mit dem allgemeinen Element $\mathrm{m}^\alpha\, \mathrm{s}^\beta$, $(\alpha, \beta) \in Z^2$ durch

$$\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{G}_0(\mathrm{m}) \odot \mathfrak{G}_0(\mathrm{s})$$

dargestellt werden, wobei die Komposanten $\mathfrak{G}_0(\mathrm{m})$ und $\mathfrak{G}_0(\mathrm{s})$ freie kommutative Gruppen vom Typus 1 sind.

Die soeben mitgeteilten Ergebnisse können ohne Schwierigkeit auf direkte Produkte $\Omega' \times \mathfrak{G}_0$ übertragen werden, bei denen $\mathfrak{G}_0$ eine freie kommutative Gruppe von höherem als dem Typus 2 ist.

§ 9. Lineare Abbildung von Vektorräumen, Isomorphismen

Der Begriff und die wichtigsten Eigenschaften des Vektorraumes wurden in § 1 der Arbeit [1] erläutert. Zu dem dort Gesagten sollen im folgenden einige ergänzende für die Anwendungen nützliche Ausführungen gemacht werden. Nachstehend wird von der folgenden Eigenschaft der Elemente des Körpers Ω Gebrauch gemacht:

Die Elemente des Körpers Ω der reellen (komplexen) Zahlen bilden einen eindimensionalen Vektorraum über Ω.

In der Tat, die Elemente des Körpers Ω bilden einen Modul, und wenn ein Element von Ω mit einer Zahl multipliziert wird, ist das Ergebnis wieder ein Element von Ω. Auf Grund dieser Eigenschaften kann leicht bestätigt werden, daß sämtliche Axiome des Vektorraumes erfüllt sind. Als Basis dieses Vektorraumes kann irgendeine von Null verschiedene Zahl genommen werden, beispielsweise die Zahl 1.

Die in Rede stehende Eigenschaft der Elemente des Körpers wird vielfach so beschrieben, daß gesagt wird, die Zahlen haben „Größencharakter". Dazu ist zu sagen, daß es sich hier um einen *ausgearteten* Fall eines Vektorraumes handelt, denn es gibt hier *keine externe Komposition*. Auch sind die Elemente des Vektorraumes Ω keine V-Elemente im Sinne des Größenkalküls, denn das

Trennungsaxiom fordert, daß die Menge der V-Elemente und die Menge Ω disjunkt sind (vgl. hierzu die Ausführungen in § 2).

Von Bedeutung für die Untersuchung der Eigenschaften von Vektorräumen ist der Begriff der *linearen Abbildung.*

Definition: Es seien X und Y zwei Vektorräume über dem Körper Ω der reellen (komplexen) Zahlen. Eine Abbildung $y = f(x)$ des Vektorraumes X in den Vektorraum Y wird linear genannt, wenn

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2),$$
$$f(\lambda x) = \lambda f(x),$$

welches auch x, x_1, $x_2 \in X$ und $\lambda \in \Omega$ sein mögen.

Im Größenkalkül interessieren besonders diejenigen linearen Abbildungen, die als Isomorphismen bezeichnet werden.

Definition. Jede lineare bijektive Abbildung $y = f(x)$ eines Vektorraumes X auf einen Vektorraum Y wird ein Isomorphismus von X auf Y genannt. Gibt es zwischen zwei Vektorräumen X und Y eine solche Abbildung, dann werden X und Y isomorph genannt.

Satz. Zwei Vektorräume über Ω, die gleiche endliche Dimension haben sind isomorph.

Da im Größenkalkül nur eindimensionale Vektorräume in Betracht kommen, möge die Behauptung hier nur für solche bewiesen werden.

Beweis: Es seien X und Y zwei eindimensionale Vektorräume, x_0 sei eine Basis des Vektorraumes X, y_0 eine des Vektorraumes Y. Dann kann das allgemeine Element des Vektorraumes X bzw. Y durch

$$x = \xi x_0, \text{ bzw. } y = \eta y_0$$

dargestellt werden. Die Abbildung

$$f(\xi x_0) = \xi y_0$$

ist linear und bijektiv. Es ist

$$f^{-1}(\eta y^0) = \eta x_0,$$

d. h. die inverse Abbildung, also die Abbildung von Y auf X, ist ebenfalls linear, die Abbildung f ist also ein Isomorphismus.

Da, wie oben gezeigt wurde, die Elemente des Körpers Ω einen eindimensionalen Vektorraum bilden, ist jeder eindimensionale Vektorraum X isomorph zu dem eindimensionalen Vektorraum, den die Elemente von Ω bilden. So ist beispielsweise auch der Vektorraum K, dessen Elemente die dimensionslosen Größen sind, isomorph zu Ω.

In dem hier allein interessierenden Falle eindimensionaler Vektorräume können Isomorphismen durch die folgende Figur geometrisch veranschaulicht werden.

Diese Figur läßt sich wie folgt interpretieren. Die Elemente der Vektorräume Ω, K, Länge, Masse und Zeit werden als Punkte auf parallelen Geraden gedeutet. Wird durch einen Punkt S, der keiner der parallelen Geraden an-

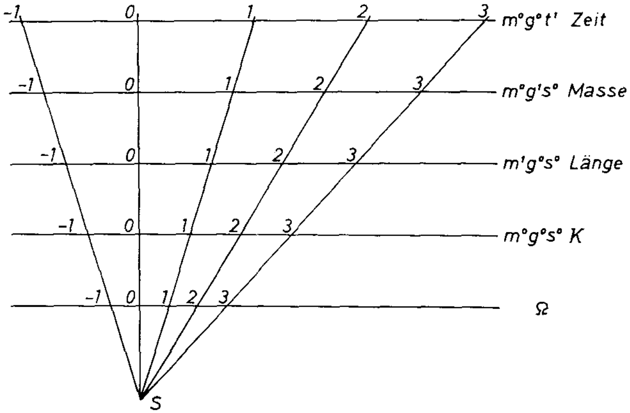

Abb. 7. Lineare Abbildung von Vektorräumen

gehört, eine Senkrechte zu diesen Geraden gezogen, und den Schnittpunkten der Senkrechten mit den Geraden jeweils das Null-Element des betreffenden Vektorraumes zugeordnet, so ergeben sich durch Ziehen eines durch die Punkte S und $1 \in \Omega$ gehenden Strahles die Punkte $1\ \mathrm{m}^0\ \mathrm{g}^0\ \mathrm{s}^0$, $1\ \mathrm{m}^1\ \mathrm{g}^0\ \mathrm{s}^0$, $1\ \mathrm{m}^0\ \mathrm{g}^1\ \mathrm{s}^0$, $1\ \mathrm{m}^0\ \mathrm{g}^0\ \mathrm{s}^1$, durch Ziehen eines weiteren Strahles durch S und $2 \in \Omega$ ergeben sich die Punkte $2\ \mathrm{m}^0\ \mathrm{g}^0\ \mathrm{s}^0$, $2\ \mathrm{m}^1\ \mathrm{g}^0\ \mathrm{s}^0$, usw.

Die soeben beschriebenen Isomorphismen sind für die Anwendung des Größenkalküls von Bedeutung. Werden nämlich, wie das vielfach der Fall ist, zur Messung physikalischer Größen Zeigerinstrumente verwendet, dann wird die betreffende Größe durch einen Zeigerausschlag gemessen, also entweder durch eine Länge (Element des Vektorraumes der Längen) oder durch einen Winkel (Element des Vektorraumes der dimensionslosen Größen).

Zusammenfassung

Unter Zugrundelegung der in der Abhandlung [1] beschriebenen algebraischen Struktur des Größenkalküls werden Anwendungen auf Geometrie, Mechanik und Elektrodynamik behandelt. Der für die Anwendungen des Kalküls fundamentale Homomorphismus $f(\mathfrak{S}^2) = \mathfrak{G}_0$ wird beschrieben und die damit zusammenhängende Frage der Erweiterung eines gegebenen Einheitensystems untersucht. Die Bedeutung der besonderen Einheiten rad (Radiant), sr (Steradiant), Np (Neper), B (Bel) wird erörtert, die der beiden letzten in Verbindung mit allgemeinen Betrachtungen über die logarithmischen Maße. Durch die Ergebnisse dieser Untersuchungen werden einige für die Anwendung wichtige Fragen geklärt.

Benutzte Symbole

(Die Zahlen geben die Seite an, auf welcher das Symbol erstmalig auftritt)

$\mathfrak{G}$	Gruppe der V-Elemente	16
Z	Menge der ganzen Zahlen	17
Z^ϱ	Kartesisches Produkt $Z \times Z \times \ldots \times Z$ mit ϱ Faktoren	18
$\alpha, \beta, \ldots$	Elemente von Z	17
Γ	Modul über dem Ring Z	17
ω	Element von Γ	17
$\mathfrak{G}_0$	freie kommutative Gruppe von endlichem Typus	19
f	Abbildung, Funktion	19
m	Erzeugende einer freien kommutativen Gruppe vom Typus 1	19
m	Längeneinheit „Meter"	21
Ω	Körper der reellen (komplexen) Zahlen	20
$\xi, \eta, \ldots$	Elemente von Ω	22
l	Länge	24
a	Flächeninhalt	24
v	Rauminhalt	24
$\mathfrak{S}$	kommutative Semigruppe	24
N	Menge der natürlichen Zahlen	24
$\mu, \nu, \ldots$	Elemente von N	24
y	ebener Winkel	25
z	räumlicher Winkel	25
(R)	Äquivalenzrelation	27
$\mathfrak{S}^2/R$	Quotientenmenge von $\mathfrak{S}^2$ in bezug auf (R)	28
K	kommutativer Körper der „dimensionslosen Größen"	30
$h(x)$	beliebige Funktion von $x \in K$	30
s	Zeiteinheit „Sekunde"	32
Δ	Untermodul des Moduls Γ	33
t	Zeitdifferenz	34
w	Winkelgeschwindigkeit	36
X, Y	Vektorräume über dem Körper Ω	47

Literatur

[1] *W. Quade:* Über die algebraische Struktur des Größenkalküls der Physik. Abh. d. d. Brschw. Wiss. Gesellschaft, XIII (1961), S. 24—65.

[2] *J. Fischer:* Größen und Einheiten der Elektrizitätslehre. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1961.

[3] *E. Flegler:* Die physikalischen Gleichungen und ihre Schreibweise. ETZ — **A 85** (1964), S. 598—605.

[4] *G. Oberdorfer:* Die Maßsysteme in Physik und Technik. Wien 1956.

[5] *U. Stille:* Messen und Rechnen in der Physik. 2. Aufl., Braunschweig 1961.

[6] *R. Godement:* Cours d'Algèbre, Paris 1963, S. 163 ff.

[7] *G. Papy:* Mathématique moderne. Brüssel-Paris 1963. Kap. 12, S. 181 ff.

[8] *A. Hochrainer:* Verhältnisgrößen. ETZ — **A 81** (1960), S. 305—309.

[9] *R. Fleischmann:* Einheitenvariante Größengleichungen, Dimensionen. Der Math. u. Naturw. Unterricht **12** (1959/60), S. 385—399, S. 443—458.

[10] *A. Chatelet:* Arithmétique et algèbre modernes. Bd. 1, Paris 1954, S. 135 ff.